VISUALISASI KONSEP BARISAN BILANGAN REAL

Syaiful Hadi
IAIN Tulungagung Jl. Mayor Sujadi Timur 46 Tulungagung
syaifulhadi77@gmail.com

ABSTRACT

A sequence of real numbers (a sequence in R) is a function defined on the set N of natural numbers whose range is contained in the set R of real numbers. The concept of sequence can be visualized as a graph of special functions with domain on the set N and range is contained in the set R. Visualization is a bridge for students who are in transition to formal thinking.

Kata Kunci:visualisasi, barisan bilangan real.

Pendahuluan

Pembelajaran matematika di perguruan tinggi tidak hanya sekedar kemampuan ingatan pengetahuan faktual ataupun aplikasi sederhana dari berbagai formula atau prinsip melainkan membutuhkan kemampuan kognitif tingkat tinggi, seperti kemampuan analisis, sintesis, dan evaluasi. Mahasiswa diharapkan mampu untuk bernalar dengan baik dan mengekspresikan hasil pernalarannya secara tertulis, sistematis dan ketat (*rigorous*).

Kurikulum Jurusan Pendidikan Matematika telah menyajikan berbagai bidang kajian matematika yang tersebar pada kelompok bidang kajian analisis, aljabar, statistika dan komputasi dengan tuntutan kemampuan berpikir matematik yang berbeda-beda.Hal ini sesuai dengan pendapat Ruseffendibahwa matematika di perguruan tinggi mencakup 4 (empat) wawasan yang luas yaituaritmatika, aljabar, geometri dan analisis[1].Pengembangan pokok-pokok kajian pada mata kuliah bidang analisis dan aljabar memiliki kekhasan yang relatif tidak berbeda.Pembahasan pokok kajian itu diawali dengan mendefinisikan suatu objek.Sifat-sifat (teorema) dari objek yang didefinisikan diturunkan dari definisi berdasarkan aturan yang telah diketahui sebelumnya dan atau melalui lemma yang harus diketahui terlebih dahulu.Hal-hal yang khusus dari objek dalam teorema dapat diidentifikasi dan menghasilkan suatu *corollary*.

Pada bidang kajian analisis terdapat salah satu matakuliah wajib bagi mahasiswa jurusan pendidikan matematika yaitu Analisis real.Analisis Real merupakan salah satu mata kuliah yang sangat menuntut penguasaan materi yang mendasarinya sebelum mempelajari pokok bahasan yang ada pada Analisis Real.Pemberian mata kuliah Analisis Real kepada mahasiswa Pendidikan Matematika diharapkan dapat memudahkan mahasiswa dalam mengkaji ilmu pada

---

[1]Ruseffendi, E. T., *Pengantar Kepada Membatu Guru MengembangkanKompotensinya Dalam Pengajaran Matematika Untuk MeningkatkanCBSA: Perkembangan Kompetensi Guru.*(Bandung: Tarsito, 1991) hal. 260.

tingkat yang lebih tinggi.Namun, harapan yang demikian besar sulit untuk dipenuhi jika mahasiswa tidak ikut aktif untuk melakukan pendalaman dan latihan-latihan untuk menerapkan konsep yang dikuasainya.Berdasarkan pengalaman beberapa kali mengampu mata kuliah analisis real umumnya beberapa permasalahan yang muncul dalam mempelajari Analisis Real adalah (1) mahasiswa kurang memahami symbol; (2) mahasiswa kurang memahami definisi; (3) mahasiswa kurang memahami sifat-sifat bersahaja; (4)mahasiswa kurang memahami hubungan antar sifat dan definisi; dan (5)mahasiswa kurang memahami maksud dan tujuan dari sifat/teorema yang diberikan.

Memahami definisi formal merupakan suatu kegiatan berpikir tingkat tinggi. Dalam memahami definisi formal terdapat proses pengolahan informasi pada pikiran. Namun sebagian besar mahasiswa matematika mengalami kesulitan dalam kegiatan berpikir tingkat tinggi karena mereka mengalami perubahan dalam proses berpikir sebagai akibat transisi dari matematika sekolah ke pembuktian formal dalam matematika murni di universitas. Matematika sekolah dapat dipandang sebagai kombinasi dari representasi visual, termasuk geometri dan grafik, bersama-sama dengan perhitungan dan manipulasi simbolis.Matematika murni di universitas bergeser menuju kerangka formal sistem aksiomatik dan bukti matematik.

Perubahan pola pembelajaran ini mengakibatkan terjadinya transisi berpikir pada mahasiswa matematika di tahun pertama perguruan tinggi. Oleh karena itu perlu alternatif lain dalam memahami definisi formal pada matematika. Hal ini seperti yang diungkapkan Sepideh Stewart yang menyarankan agar dilakukan penelitian mendalam mengenai bagaimana proses berpikir mahasiswa sehingga dapat mencapai berpikir formal[2].Penelitian lainmengenai transisi menuju berpikir formal menunjukkan bahwa guru matematika lebih cenderung pada dunia simbolis sedangkan dosen lebih cenderung pada dunia formal. Guru lebih cenderung pada gaya prosedural sedangkan dosen lebih cenderung pada gaya formal[3].

Salah satu alternatif dalam memahami definisi formal pada mata kuliah analisis real adalah menyajikan konsep matematika yang abstrak yang berangkat dari definisi formal adalah dengan pemahaman secara visual, hal ini sebagaimana hasil penelitian Pinto yang menemukan dua jalur yang ditempuh mahasiswa dalam matakuliah analisis real, yaitu jalur alami dan jalur formal, untuk menuju berpikir formal. Jalur alami dibangun berdasarkan dunia perwujudan, simbolis atau gabungan keduanya dan membentuk jaringan dengan bayangan mental selama proses menerjemahkan bayangan mental menjadi bukti tertulis. Jalur

---

[2]Sepideh Stewart. *Understanding Linear Algebra Concepts Through the Embodied, Symbolic and Formal Worlds of Mathematical Thinking*. (New Zealand: Unpublished PhD. Thesis, Department of Mathematics, The University of Auckland, 2008). hal. 247

[3]Ye Yon Hong, , Kerr, S.. Klymchuk, S.. McHardy, J.. Murphy, P.. Spencer, S.. Thomas, M.. & Watson, P. *Modelling the Transition from Secondary to Tertiary Mathematics Education: Teacher and Lecturer Perspectives*. (New Zealand.: Article from Group Research, Auckland University of Technology, 2009). hal. 250

formal menfokuskan pada teorema-teorema dan langkah logika yang diperlukan untuk mencapai kesimpulan yang diinginkan[4].

Visualisasi Konsep Barisan Bilangan Real

Di sekolah menengah barisan diperkenalkan sebagai kumpulan bilangan yang disusun menurut ”pola” tertentu, misalnya barisan aritmatika dan barisan geometri. Biasanya barisan dan deret merupakan satu kesatuan pokok bahasan. Sekarang barisan dipahami dari sudut pandang analisis dan ia merupakan bentuk khusus dari fungsi.Barisan bilangan realdidefinsikan sebagai suatu fungsi dengan domain himpunan bilangan asli $\mathbb{N}$ dengan *range* termuat didalam himpunan bilangan real$\mathbb{R}$[5].Untuk mempersingat istilah barisan bilangan real selanjutnya disebut barisan.

Jadi barisan adalah fungsi $X : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, dimana setiap $n \in \mathbb{N}$ nilai fungsi $X(n)$ biasa ditulis sebagai

$$X(n) \coloneqq x_n$$

dan disebut suku ke-n barisan X. Notasi barisan yang sering digunakan adalah

$$X \text{ atau} (x_n) \text{atau} (x_n \colon n \in \mathbb{N}) \text{ atau } \langle x_n \rangle \text{atau } \{x_n\}_{n=1}^{\infty}.$$

Pada buku ini akan menggunakan (x_n) untuk notasi barisan.

Berdasarkan definisi bahwa barisan adalah suatu fungsi maka barisan dapat divisualisasikan sebagai grafik fungsi khusus dengan domain himpunan bilangan asli dan range yang berada di himpunan bilangan real. Oleh karena itu untuk memahami lebih jauh tentang konsep barisan dapat divisualisasikan dalam bentuk diagram titik.

Tentang visualisasi banyak peneliti yang memerhatikan tentang visualisasi dalam belajar matematika salah satunya adalah Zimmermann & Cunngingham mengatakan bahwa visualisasiadalah kemampuan, proses dan produk dari kreasi, interpretasi, penggunaandan refleksi gambar, diagram, di dalam pikiran di atas kertas atau denganteknologi, dengan tujuan menggambarkan dan mengkomunikasikan informasi,memikirkan dan mengembangkan ide-ide yang sebelumnya tidak diketahui danmemajukan pemahaman[6].

Adapun peran visualisasi, yaitu (1).Untuk memahami masalah, (2).Untuk menyederhanakan masalah, (3).Untuk melihat keterkaitan (koneksi) ke masalah terkait, (4). Untuk memenuhi gaya belajar individual, (5). Sebagai pengganti untuk komputasi/ perhitungan, (6).Sebagai alat untuk memeriksa solusi, (7).Untuk

---

[4]Márcia Maria Fusaro Pinto. 1998. *Students' Understanding of Real Analysis*. (UK: Unpublished PhD Thesis, University of Warwick, 1998). hal 295.

[5]Robert G. Bartle and Donald R. Sherbert, *Introduction to RealIntroduction to Real Analysis, Third Edition*, (USA: John Wiley and Sons, Inc, 2011). hal 55

[6]Walter Zimmerman and Cunningham, S. (Eds.). Editors introduction: What is Mathematical Visualization? In Zimmerman, W. and Cunningham, S. (Eds.) *Visualization in teaching and learning mathematics*. MAA Notes Number 19. (Washington DC: Mathematical Association of America, 1991). hal. 1-7.

mengubah masalah ke dalam bentuk intuitif.Bentuk intuitif dapatdiperoleh dari representasi visual untuk memecahkan masalah[7].

Sebelum membahas tentang visualisasi barisan bilangan real berikut disajikan diagram materi barisan.

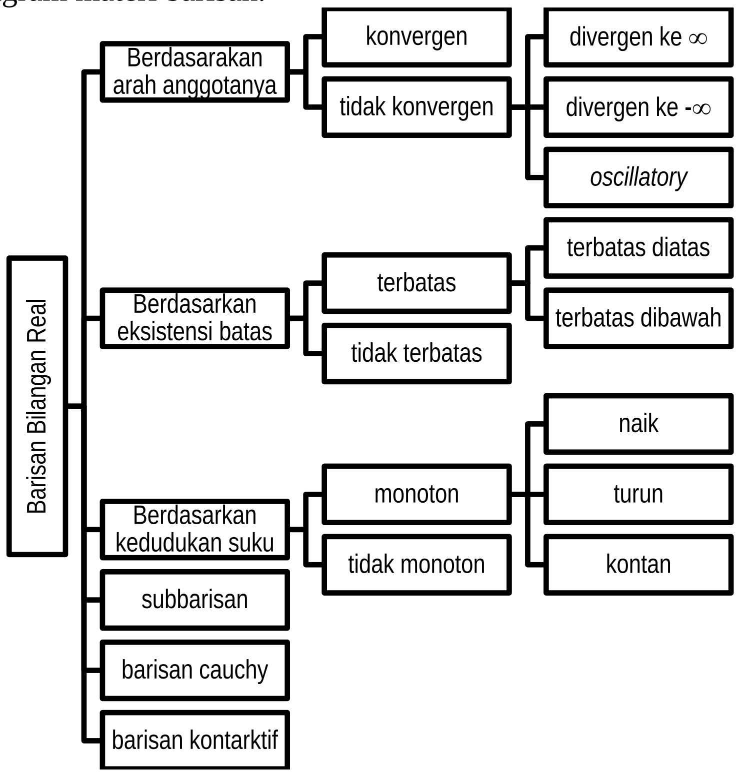


Diagram 1. Hubungan Materi Barisan Bilangan Real

Visualisasi Barisan Berdasarkan Arah Kecenderungannya

Barisan bila ditinjau berdasarkan kecenderungan dari anggotanya terdiri dari barisan konvergen dan barisan tidak konvergen, barisan yang tidak konvergen terbagi menjadi barisan divergen ke ∞, divergen ke -∞ dan barisan *oscillatori*.

Barisan Konvergen

Barisan (x_n) dikatakan konvergen ke $x \in \mathbb{R}$, jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $M_\varepsilon \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga

$$\left|x_n - x\right| < \varepsilon \text{ untuk setiap } n \geq M_\varepsilon.$$[8]

Bilangan x dalam hal ini disebut sebagai limit barisan (x_n), dan barisan bilangan real (x_n) konvergen atau menuju ke x dapat dinyatakan sebagai

$$\lim X = x \text{ atau} \lim\left(x_n\right) = x \text{ atau } \lim_{n\to\infty} x_n = x \text{ atau } x_n \to x.$$

[7]Norma Presmeg, *Visualization in high school mathematics. For the Learning of Mathematics*, 6 (3), (1986) hal. 42-46

[8]Jiri Lebi, Basic Analysis: *Introduction to Real* …, hal. 40

Secara informal, kita dapat mengatakan bahwa x_n ‘menuju x’ bila n ‘menuju tak terhingga’. Untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, bilangan x_n dapat dianggap sebagai hampiran untuk x (dan sebaliknya, x merupakan hampiran untuk x_n). Jarak (yaitu $|x_n - x|$) antara x_n dan x menyatakan kesalahan pada penghampiran tersebut (dengan ε sebagai taksiran kesalahan maksimum-nya). Definisi di atas menyatakan bahwa kesalahan tersebut dapat dibuat sekecil-kecilnya dengan memilih n cukup besar.

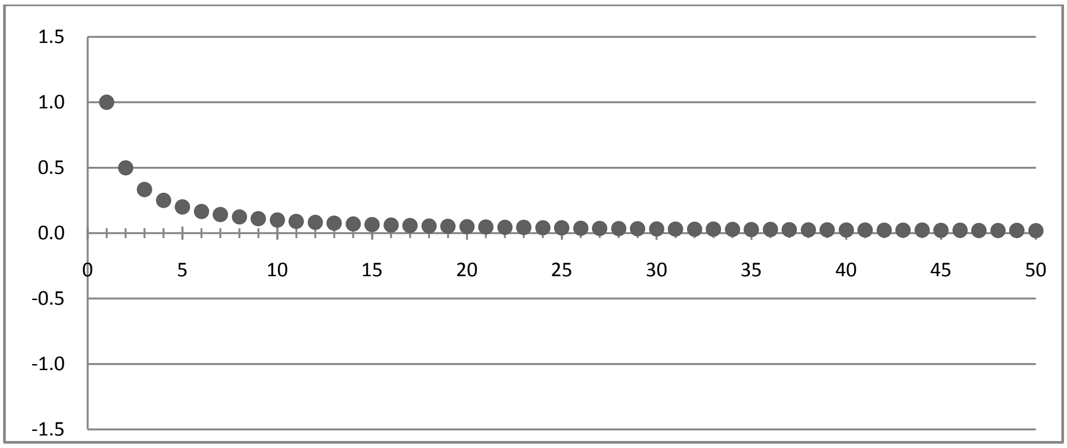
Untuk memperjelas pemahaman terhadap definisi barisan konvergensecara formal diberikan contoh barisan $(\frac{1}{n})$ yang konvergen ke 0.

Langkah pertama, sebagai ilustrasi dapat dengan terlebih dahulu mendaftar keanggotaan barisan dari barisan $(\frac{1}{n})$ sebagai berikut.

n	(x_n)
1	1,00000
2	0,50000
3	0,33333
4	0,25000
5	0,20000
6	0,16667
7	0,14286
8	0,12500
...	...

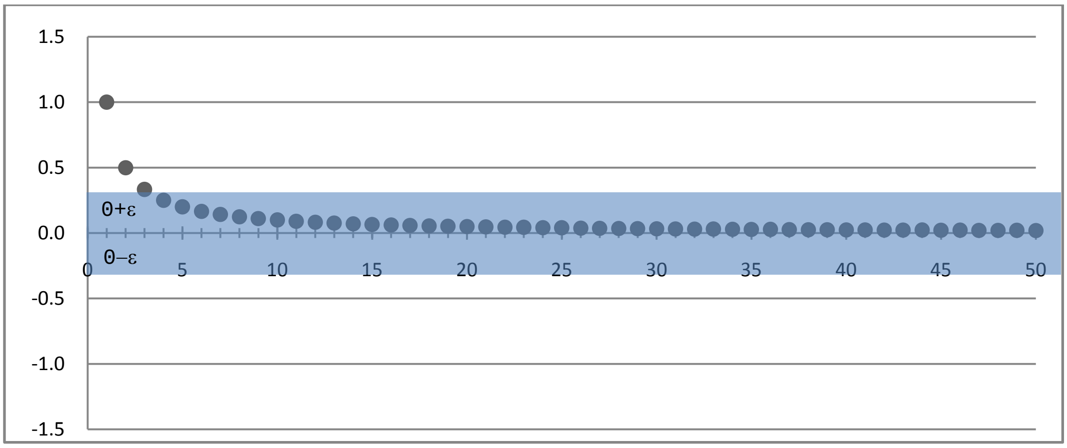
Semakin banyak suku barisan yang diketahui, semakin memberikan gambaran secara intuisi bahwa barisan tersebut akan konvergen ke 0.

Karena barisan bilangan real adalah suatu fungsi dengan domain himpunan bilangan asli $\mathbb{N}$ dengan range termuat didalam $\mathbb{R}$. Oleh karena itu barisan bilangan real dapat digambarkan/ divisualisasikan dalam bentuk grafik dengan domain himpunan bilangan asli dan range termuat didalam himpunan bilangan real. Berikut visualisasi dari barisan $(\frac{1}{n})$ secara grafik.



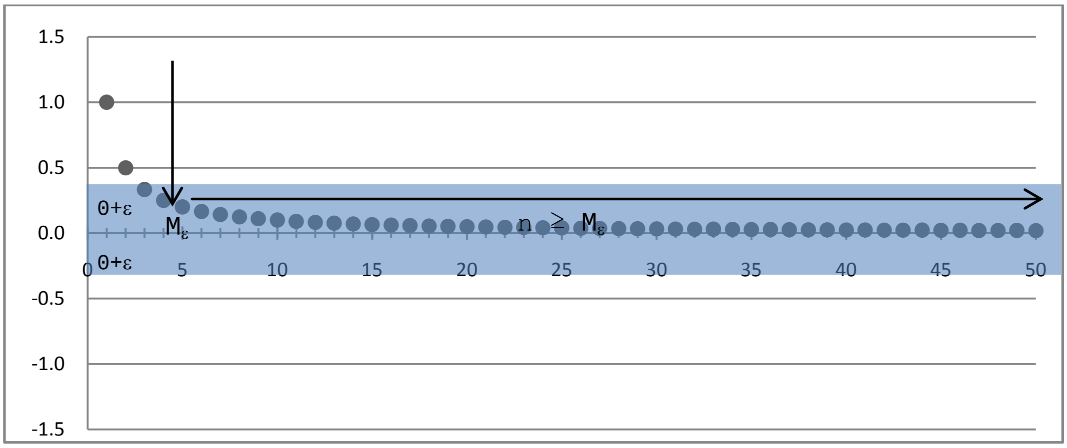
Gambar 1. Visualisasi barisan $(\frac{1}{n})$

Selanjutnya guna memperjelas pernyataan untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $M_\varepsilon \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $|x_n - x| < \varepsilon$ untuk setiap $n \geq M_\varepsilon$. Maka harus diingat tentang $|x_n - x| < \varepsilon$ yang menunjukkanpersekitaran α yaitu $x_n \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ atau $x-\varepsilon < x_n < x + \varepsilon$, sehigga peran $\varepsilon > 0$ secara visual sebagai berikut



Gambar 2. Visualisasi menentukan dan memberikan garis x dan ε

Berikutnya untuk memperjelas hubungan pernyataan untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $M_\varepsilon \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $|x_n - x| < \varepsilon$ untuk setiap $n \geq M_\varepsilon$ dapat disajikan dalam visual berikut:



Gambar 3. Visualisasi dalam menentukan garis M_ε

Untuk memperjelas hubungan ε dengan $M_\varepsilon$perlu dilakukan pengecekan jika ε = 0,5 berapakah $M_\varepsilon$yang dapat diambil? Jika ε = 0,25 apakah M_ε= 4 atau 16 atau yang lain untuk membuktikan barisan tersebut konvergen ke 0?.

Adapun pembuktian secara formal bahwa barisan $(\frac{1}{n})$ konvergen ke 0 adalah sebagai berikut:

Disini kita ketahui bahwa $x_n = \frac{1}{n}$ dan $x = 0$.

Untuk sebarang $\varepsilon > 0$ harus kita tunjukkan terdapat $M_\varepsilon \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$ untuk setiap $n \geq M_\varepsilon$.

Selanjutnya, lihat bahwa $\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$. Bentuk ketidaksamaan $\frac{1}{n} < \varepsilon$ diselesaikan diperoleh $n > \frac{1}{\varepsilon}$. Sehingga cukup diambil bilangan asli $M_\varepsilon > \frac{1}{\varepsilon}$. Akibatnya, $\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$ untuk setiap $n \geq M_\varepsilon$. Yang demikian berlaku untuk setiap $\varepsilon > 0$. Ini artinya bahwa barisan $(\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N})$ konvergen ke 0 atau $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$.

Berdasarkan pembuktian secara formal tersebut misalkan diberikan ε= 0,12 maka $\frac{1}{\varepsilon}$= 8,33. Jadi cukup diambil M_ε= 9. Untuk meyakinkan dapat diperiksa untuk $n \geq M_\varepsilon$= 9

n	$\lvert x_n - 0 \rvert$
9	0,11111
10	0,10000
11	0,09091
12	0,08333
13	0,07692
14	0,07143
15	0,06667
...	...

yang kesemua $\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon \coloneqq 0{,}12.$

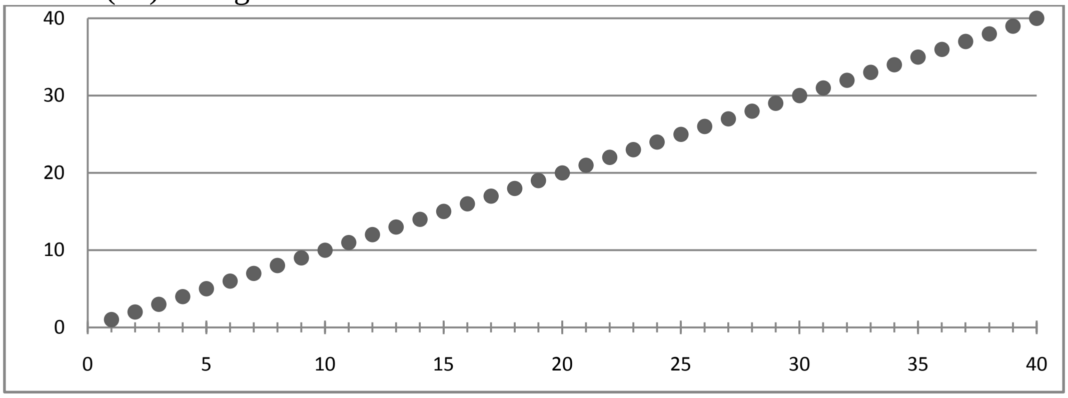
Barisan Divergen dan Barisan *Oscillatori*

Jika suatu barisan (x_n) tidak konvergen maka barisan (x_n) dikatakan barisan divergen.

Barisan(x_n) dikatakan divergen ke ∞ ditulis $x_n \to \infty$ jika untuk setiap x $\in \mathbb{R}$ terdapat bilangan bulat $n_o \in \mathbb{N}$sedemikian hingga $x_n > x$ untuk semua $n \geq n_o$.Begitu juga sebaliknya barisan(x_n) dikatakan divergen ke $-\infty$ ditulis $x_n \to -\infty$ jika untuk setiap x $\in \mathbb{R}$ terdapat bilangan bulat $n_o \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga $x_n < x$ untuk semua $n \geq n_o$.[9]

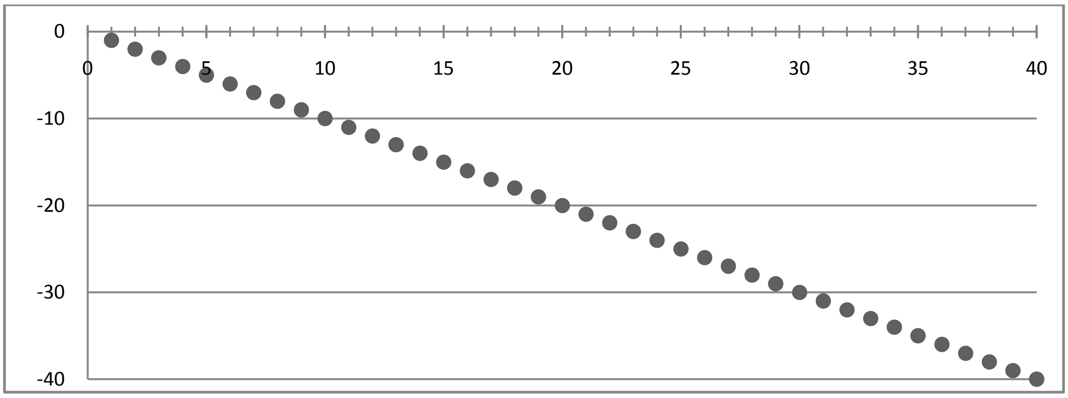
Mungkin sebagian akan mengatakan bahwa barisan divergen ke ∞ merupakan suatu barisan yang konvergen ke ∞ dan barisan divergen ke $-\infty$ merupakan suatu barisan yang konvergen ke $-\infty$. Untuk itu perlu diingat kembali tentang konsep himpunan bilangan real bahwa ∞ dan $-\infty$ bukan merupakan naggota himpunan bilangan real sehingga barisan yang cenderung ke ∞ atau $-\infty$ tidak dapat dikatakan konvergen.

Berikut ini diberikan contoh visualisasi barisan (n) yang divergen ke ∞ dan barisan ($-n$) divergen ke $-\infty$.



(a)

[9] Manfred Stool, *Introduction to Real Analysis. Second Edition*, (USA: Addison Wesley Logman, 2001) hal. 65.

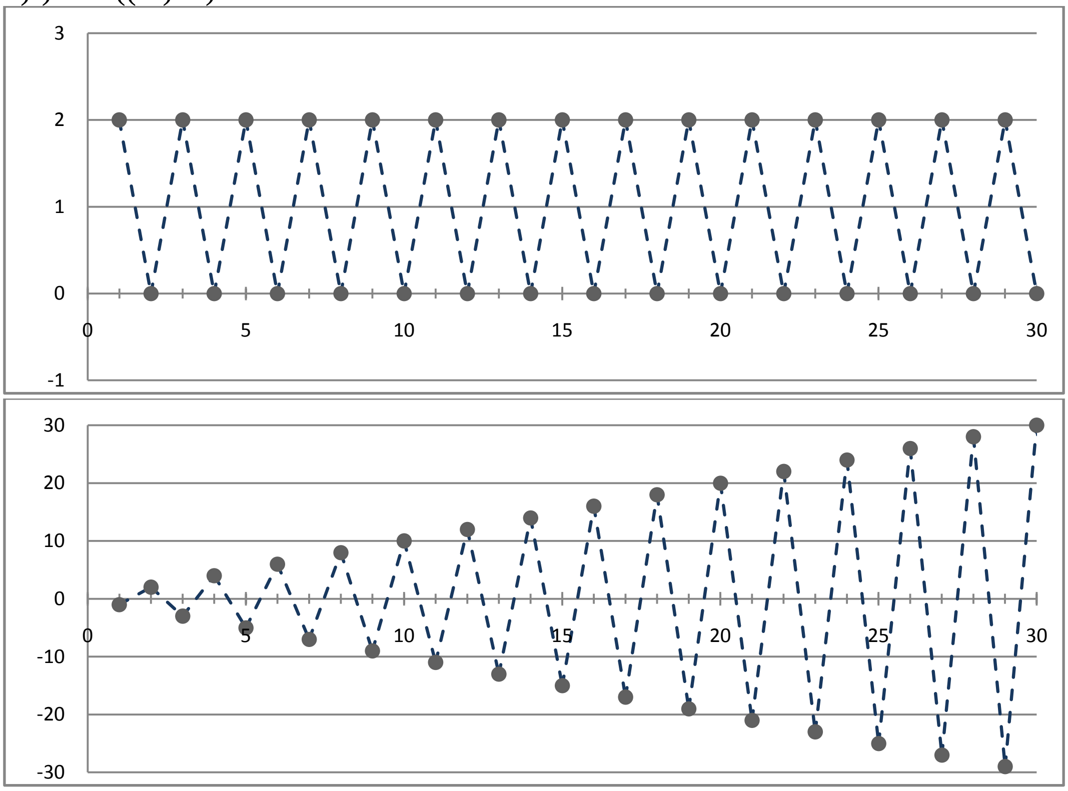


(b)

Gambar 4. Visualisasi (a) barisan divergen ke ∞ dan (b) divergen ke –∞

Secara visualisasi terlihat bahwa anggota/suku-suku dari barisan (n) cenderung menuju ∞ dan dan suku-suku dari barisan ($-n$) cenderung menuju $-\infty$ hal ini mengingatkan bahwa tidak terdapat x sebagai batas dari barisan tersebut.

Barisan yang tidak konvergen ke satu bilangan real tertentu dan tidak divergen disebut barisan *oscillatori*. Berikut diberikan visualisasi barisan $(1 - (-1)^n)$ dan $((-1)^n n)$.

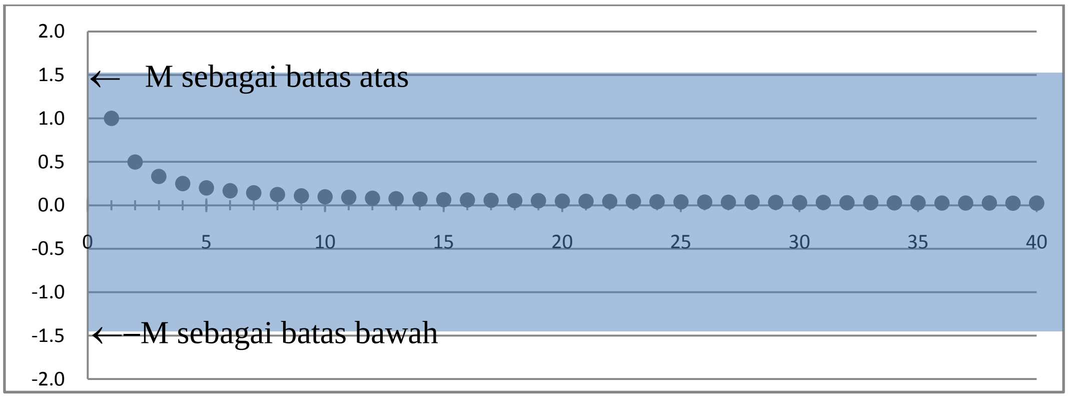


Gambar 5. Visualisasi barisan *oscillatori*

Jejak garis pada visualisasi barisan *oscillatori*pada gambar 4 hanya untuk membantu melihat sifat *oscillatori*yang ada bukan merupakan anngota dari barisan. Secara visual pada barisan $(1 - (-1)^n)$ nampak bahwa suku-suku dari barisan tidak menuju ke satu bilangan real tertentu namun ke bilangan 0 dan 2, begitu juga untuk barisan $((-1)^n\, n)$ kecendurang dari susku-sukunya menuju ke ∞ dan $-\infty$, maka barisan tersebut tidak konvergen.

Visualisasi Barisan Berdasarkan Eksistensi Batas

Ditinjau dari eksistensi batas dikenal barisan terbatas. Barisan bilangan real (x_n)dikatakan terbatas jika terdapat bilangan real $M > 0$ sedemikan sehingga $|x_n| \leq M$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$[10]. Berikut visualisai dari barisan $(\frac{1}{n})$ ditinjau berdasarkan eksistensi batas.



Gambar 6. Visualisasi barisan terbatas

Berdasarkan visualisasi grafik tersebut kita dapat menentukan berapa nilai dari M sehingga setiap suku-suku dari barisan berada pada pada renatng –M dan M atau $|x_n| \leq M$. Pada contoh diatas semua suku-suku dari barisan $(\frac{1}{n})$kita dapat memilih nilai M = 1,5 atau dengan kata lain $|x_n| \leq 1{,}5$. Secara visual tersebut kita juga dapat menentukan nilai batas atas dan batas bawah dari suatu barisan.

Visualisasi Barisan Berdasarkan Kedudukan Antar Suku-sukunya

Barisan bila ditunjau dari kedudukan antar suku-sukunya dibedakan menjadi barisan monoton dan barisan tidak monoton (konstan).

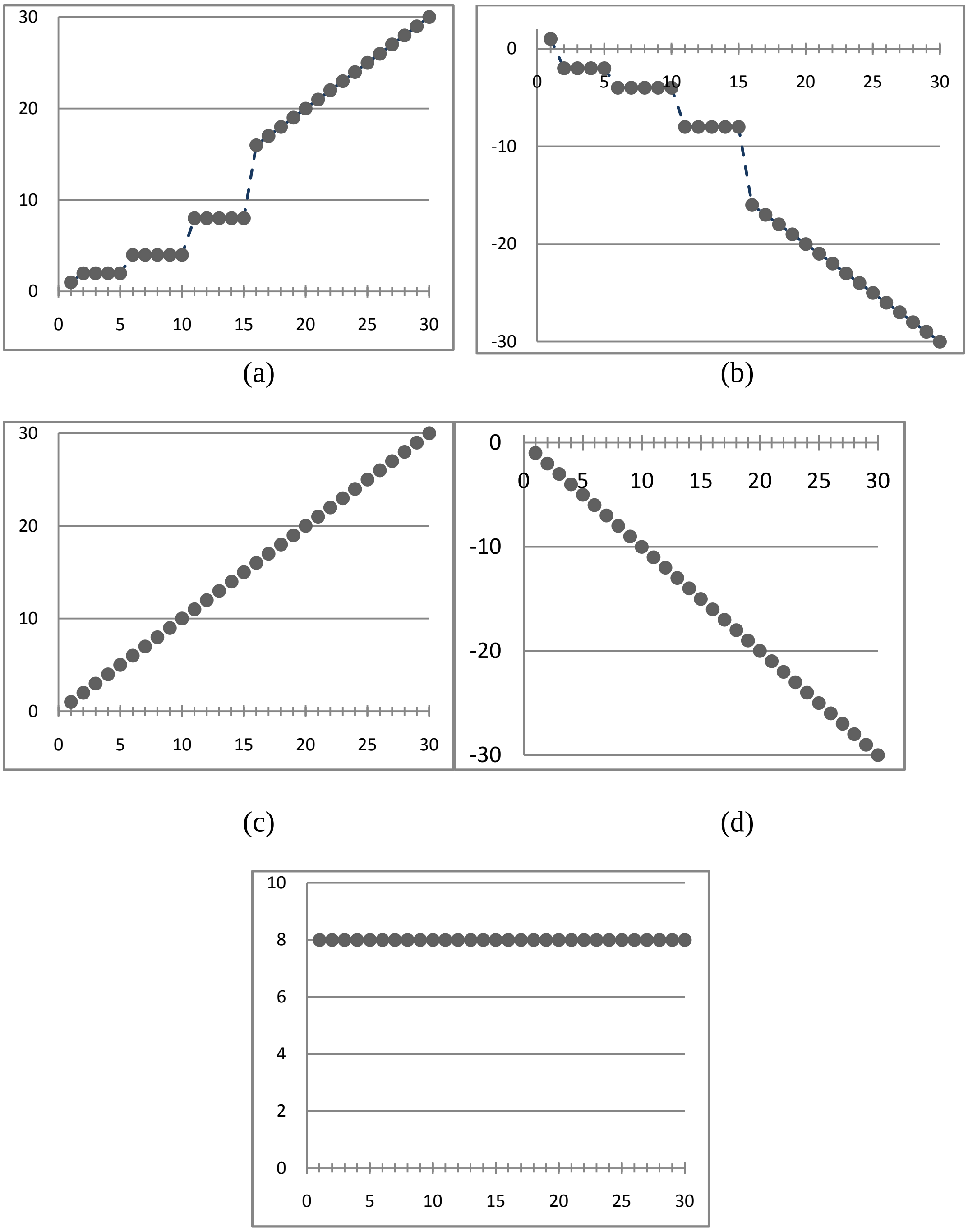
Barisan (x_n) dikatakan naik (*increasing*) jika $x_n \leq x_{n+1}$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.Barisan (x_n) dikatakan naik tegas (*strictly increasing*) jika $x_n < x_{n+1}$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.Barisan (x_n) dikatakan turun (*decreasing*) jika $x_n \geq x_{n+1}$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.Barisan (x_n) dikatakan turun tegas (*strictly decreasing*) jika $x_n > x_{n+1}$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.[11].

Suatu barisan (x_n) dikatakan monoton jika berlaku salah satu barisan (x_n) naik atau barisan (x_n) turun.Berdasarkan definisi barisan tersebut suatu barisan dikatakan naik tegas jika kedudukan suku berikutnya lebih dari suku sebelumnya dan suatu barisan dikatakan turun tegas jika kedudukan suku berikutnya kurang

[10]Robert G. Bartle and Donald R. Sherbert, *Introduction to Real …*, , hal 63
[11]William F. Trench, *Introduction to Real …,* hal 182

dari suku sebelumnya.Barisan dikatakan barisan konstan jika barisan tersebut tidak turun dan tidak naik atau kedudukan suku-sukunya adalah tetap.

Berikut diberikan berturut-turut visualisasi barisan monoton naik, monoton turun, monoton naik tegas, monoton turun tegas dan barisan konstan.



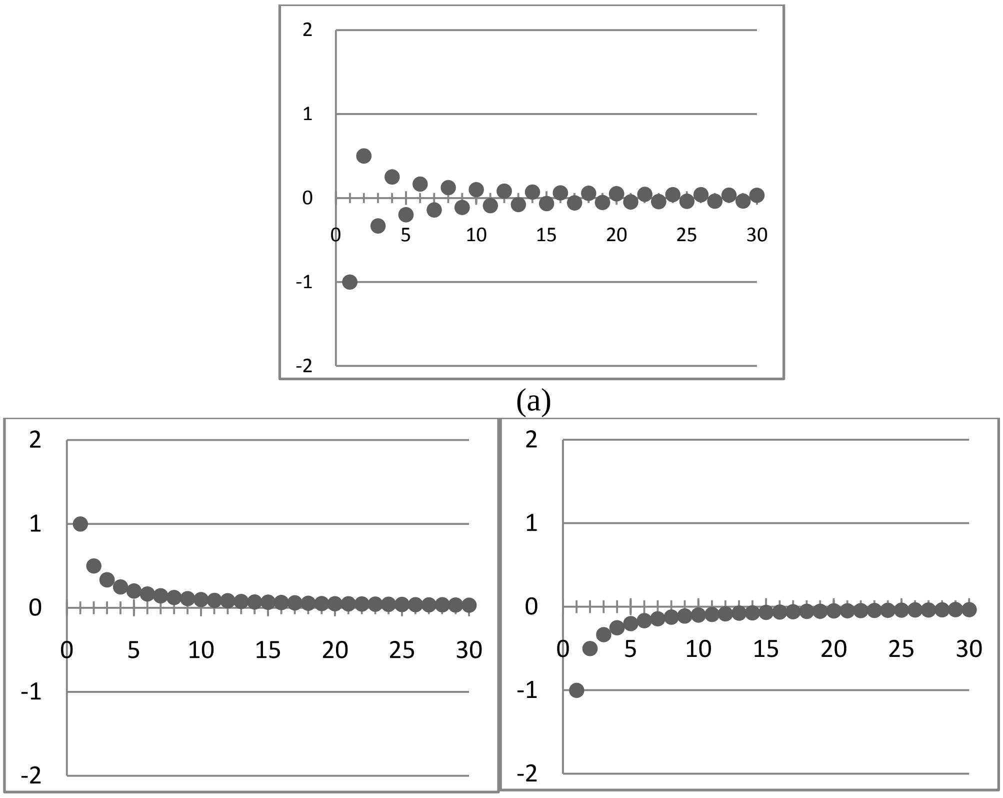
Gambar 7. Visualisasi barisan (a) monoton naik, (b) monoton naik, (c) monoton naik tegas, (d) monoton turun tegas dan (e) konstan

Subbarisan

Ditinjau dari keanggotaan terdapat konsep sub barisan. Adapun definsi formalsub barisan adalah sebagai berikut:

Diberikanbarisan bilangan real (x_n) dan diberikan barisan bilangan asli naik tegas $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$makabarisan$\left(x_{n_k}\right) = \left(x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_k}, \dots\right)$ disebut dengan barisanbagian atau sub barisan(*subsequences*) dari barisan (x_n)[12].

Berikut ini visualisasi contoh-contoh sub barisan dari barisan $\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)$.



(a)

(b) (c)

Gambar 8. Visualisasi sub barisan (b) dan (c) dari barisan induk (a)

Barisan Cauchy dan Barisan Kontraktif

Barisan (x_n) disebut *barisan Cauchy* apabila untuk setiap ε> 0 terdapat$N\in\mathbb{N}$sedemikian sehingga untuk$m$, $n>N$berlaku $|x_n - x_m| < \varepsilon$[13].

Secara intuitif, suku-suku pada barisan Cauchy mendekat dan semakin mendekat satu sama lain.Barisan (x_n) disebut barisan kontraktifapabila ter-dapat suatu konstanta $0 < C < 1$ sedemikian sehingga $|x_{n+2} - x_{n+1}| \le C|x_{n+1} - x_n|$untuk setiap $n \in \mathbb{N}$[14]. Berikut ini contoh visualisai dari barisan

[12]*Ibid*, hal 78
[13]*Ibid*, hal 85
[14]*Ibid*, hal 65

kontraktif.Contoh visualisasi dari barisan Cauchy dan barisan kontraktif seperti pada gambar 8 (a).

Penutup

Visualisasi adalah kemampuan, proses dan produk dari kreasi, interpretasi, penggunaan dan refleksi gambar, diagram, di dalam pikiran di atas kertas atau dengan teknologi, dengan tujuan menggambarkan dan mengkomunikasikan informasi, memikirkan dan mengembangkan ide-ide yang sebelumnya tidak diketahui dan memajukan pemahaman. Definisi barisan yang merupakan suatu fungsi maka barisan dapat divisualisasikan sebagai grafik fungsi khusus dengan domain himpunan bilangan asli dan range yang berada di himpunan bilangan real.Visualisasi ini adalah sebagai salah satu alternatif mahasiswa yang sedang mengalami transisi menuju berpikir formal pada mata kuliah analisis real.

DAFTAR RUJUKAN

Bartle, R.G and Sherbert, D.R. 2011.*Introduction to Real Analysis, Third Edition*, USA: John Wiley and Sons, Inc,.

Hong, YY., Kerr, S.. Klymchuk, S.. McHardy, J.. Murphy, P.. Spencer, S.. Thomas, M.. & Watson, P.. 2009. *Modelling the Transition from Secondary to Tertiary Mathematics Education: Teacher and Lecturer Perspectives*. Article from Group Research, Auckland University of Technology, New Zealand.

Lebi, Jiri. (2012). *Basic Analysis:Introduction to Real Analysis*San Fransisco, California, USA: Jirka.

Pinto, M. M. F. 1998. *Students' Understanding of Real Analysis*. Unpublished PhD Thesis, University of Warwick. UK.

Presmeg, 1986, *Visualization in high school mathematics. For the Learning of Mathematics*, 6 (3), 42-46

Ruseffendi, E. T. 1991. Pengantar Kepada Membatu Guru MengembangkanKompotensinya Dalam Pengajaran Matematika Untuk Meningkatkan CBSA: Perkembangan Kompetensi Guru. Bandung: Tarsito.

Sepideh Stewart. 2008. *Understanding Linear Algebra Concepts Through the Embodied, Symbolic and Formal Worlds of Mathematical Thinking*. Unpublished PhD. Thesis, Department of Mathematics, The University of Auckland. New Zealand.

Trench, William F. 2003. *Introduction to Real Analysis.* USA: Pearson Education.

Zimmerman, W. and Cunningham, S. (Eds.). 1991. Editors introduction: What is Mathematical Visualization? In Zimmerman, W. and Cunningham, S. (Eds.) *Visualization in teaching and learning mathematics*. MAA Notes Number 19. Washington DC: Mathematical Association of America.