



Lapisan Pemahaman Matematis Pirie-Kieren dan Pencapaiannya melalui *Scaffolding*: Studi Kasus Pemecahan Masalah Sistem Persamaan Linear Dua Variabel Siswa SMP

Syekha Vivi Alaiya¹, Susiswo^{2*}, Puguh Darmawan³

^{1,2*,3}Departemen Matematika, Universitas Negeri Malang, Jl. Semarang No. 5, Kota Malang
e-mail: syekha.vivi.2103116@students.um.ac.id¹, susiswo.fmipa@um.ac.id^{2*},
puguh.darmawan.fmipa@um.ac.id³

ABSTRAK

Penelitian ini bertujuan mengungkap lapisan pemahaman matematis siswa dan memberikan *scaffolding* untuk mencapai seluruh lapisan pemahaman matematis Pirie-Kieren. Penelitian ini merupakan penelitian kualitatif dengan jenis studi kasus jamak. Subjek penelitian ini dikategorikan menjadi tiga jenis yaitu, (1) S1A dan S1B adalah siswa yang menuliskan langkah pemecahan secara terstruktur dan jawabannya benar, (2) S2A dan S2B adalah siswa yang menuliskan langkah pemecahan secara terstruktur namun terdapat langkah yang salah sehingga jawabannya salah, (3) S3A dan S3B adalah siswa yang menuliskan pemecahan secara tidak terstruktur namun jawabannya benar. Dua subjek dipilih dari setiap kategori untuk menghasilkan data jenuh. Hasil penelitian menunjukkan bahwa, (1) S1A dan S1B mengalami *folding back* ke lapisan bagian dalam, kemudian mencapai seluruh lapisan pemahaman matematis secara sistematis setelah pemberian *scaffolding*, (2) S2A dan S2B mencapai lapisan pemahaman matematis bagian luar tertentu setelah pemberian *scaffolding*, (3) S3A dan S3B mencapai lapisan pemahaman matematis bagian dalam tertentu setelah pemberian *scaffolding*. Penelitian ini menemukan bahwa, setiap subjek mencapai seluruh lapisan pemahaman matematis Pirie-Kieren setelah pemberian *scaffolding* melalui tiga cara yaitu, (1) pemberian pertanyaan pemantik, (2) pemberian contoh pemecahan masalah, (3) pemberian umpan balik konstruktif. Pemahaman terhadap lapisan pemahaman matematis Pirie-Kieren siswa dapat digunakan guru sebagai pertimbangan untuk perbaikan pembelajaran.

Kata Kunci: lapisan pemahaman matematis, *scaffolding*, SPLDV, Teori Pirie-Kieren

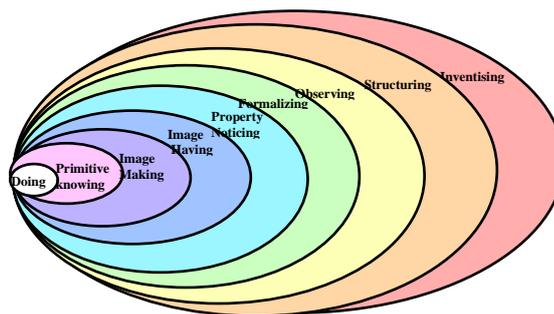
ABSTRACT

This research aims to uncover layers of students' mathematical understanding and provide scaffolding to achieve all layers of Pirie-Kieren's mathematical understanding. This study is qualitative research with a multiple case study design. The research subjects are categorized into three types: (1) S1A and S1B are students who write structured problem-solving steps and their answers are correct, (2) S2A and S2B are students who write structured problem-solving steps but make mistakes in some steps resulting in incorrect answers, and (3) S3A and S3B are students who write unstructured problem-solving steps but their answers are correct. Two subjects are chosen from each category to generate saturated data. The results of this research indicate that (1) S1A and S1B experience folding back to the inner layers, then systematically reach all layers of mathematical understanding after scaffolding, (2) S2A and S2B reach certain outer layers of mathematical understanding after scaffolding, (3) S3A and S3B reach certain inner layers of mathematical understanding after scaffolding. This research found that each subject reaches all layers of Pirie-Kieren's mathematical understanding after scaffolding through three methods: (1) providing prompting questions, (2) providing problem-solving examples, and (3) providing constructive feedback on subject answers. The teacher's understanding of students' Pirie-Kieren mathematical understanding layers can be used to improve learning.

Keywords: layers of student's mathematical understanding, *scaffolding*, SPLDV, Pirie-Kieren's Theory

PENDAHULUAN

Pemahaman matematis menurut Pirie & Kieren merupakan pertumbuhan pemahaman yang bersifat utuh, dinamis, berlapis, dan tidak berakhir (Irvine, 2023; Sa'adah et al., 2020). Lapisan pemahaman matematis Pirie-Kieren meliputi, (1) *primitive knowing*, (2) *image making*, (3) *image having*, (4) *property noticing*, (5) *formalizing*, (6) *observing*, (7) *structuring*, dan (8) *inventising* (Pirie & Kieren, 1989). Inti teori Pirie-Kieren adalah pemahaman matematis bukan suatu fungsi naik yang kontinu. Hal ini karena seseorang dapat mengalami *folding back* atau kembali ke lapisan pemahaman sebelumnya untuk maju ke lapisan pemahaman selanjutnya (Susiswo, 2014). Delapan lapisan pemahaman matematis Pirie-Kieren disajikan pada Gambar 1.



Gambar 1. Lapisan Pemahaman Matematis Pirie-Kieren

Pemahaman matematis merupakan bagian dari numerasi (Ayuningtyas et al., 2024). Dalam AKM numerasi level 4 untuk kelas 8, terdapat topik aljabar terkait sistem persamaan linear dua variabel (SPLDV) (Pusmendik, 2022). SPLDV berkaitan erat dengan masalah kontekstual seperti perkiraan usia seseorang dan hal lain yang relevan (Ananda, 2021). Akan tetapi, kemampuan siswa dalam memecahkan masalah kontekstual SPLDV masih rendah (Jannah et al., 2023). Kemampuan siswa yang rendah dalam pemecahan masalah tersebut menunjukkan bahwa siswa belum mampu mencapai setiap lapisan pemahaman matematis Pirie-Kieren (Kumesan et al., 2023; Nayazik, 2022). Sementara itu, menurut Suidayati et al. (2019) siswa dengan kemampuan matematika tinggi dapat mencapai seluruh lapisan pemahaman matematis Pirie-Kieren. Dengan demikian, dapat dikatakan bahwa siswa yang mampu memecahkan masalah matematika berarti telah mencapai seluruh lapisan pemahaman matematis Pirie-Kieren.

Indikasi bahwa siswa yang mampu memecahkan masalah matematika berarti telah mencapai seluruh lapisan pemahaman matematis Pirie-Kieren diidentifikasi peneliti saat studi pendahuluan di SMPN 1 Kalidawir, Kabupaten Tulungagung melalui tes tertulis dan wawancara kepada siswa. Jawaban siswa dalam memecahkan masalah disajikan pada Gambar 2.

usia aska dan alifian 25 tahun
alifian : 5 th + 5 = 20 th (2x)
aska : 10 th

alifian : 15 - 4 = 11 th
aska : 10 - 4 = 6 th

Alifian : 15 + 8 = 23 th
Aska : 10 + 8 = 18 th

Gambar 2. Jawaban Siswa dalam Memecahkan Masalah

Siswa tersebut mencapai lapisan pemahaman matematis terluar yaitu *inventising* yang ditandai merah pada [Gambar 2](#). Hal itu karena, siswa dapat menemukan gagasan baru dengan menghitung usia Alfian dan usia Asca pada empat tahun lalu dan delapan tahun mendatang menggunakan data yang diperoleh sebelumnya. Yakni, pada empat tahun lalu usia Alfian adalah $15 - 4 = 11$ tahun dan usia Asca $10 - 4 = 6$ tahun. Sementara itu, pada delapan tahun mendatang usia Alfian adalah $15 + 8 = 23$ tahun dan usia Asca adalah $10 + 8 = 18$ tahun. Akan tetapi, berdasarkan hasil wawancara dengan siswa diperoleh data bahwa lapisan pemahaman matematis lainnya yaitu, *primitive knowing* tidak tercapai karena siswa tidak mampu mengidentifikasi informasi pada masalah. Lebih lanjut, lapisan pemahaman matematis *image making*, *image having*, *property noticing*, *formalizing*, *observing*, dan *structuring* juga tidak dicapai siswa karena menghasilkan jawaban melalui *trial and error* tanpa melakukan prosedur dalam pemecahan masalah SPLDV yang dibelajarkan guru maupun yang disajikan dalam buku ajar. Karena itu, hasil studi pendahuluan menunjukkan bahwa siswa yang dapat memecahkan masalah matematika dengan benar belum tentu mencapai seluruh lapisan pemahaman matematis Pirie-Kieren. Pernyataan tersebut bertentangan dengan indikasi bahwa siswa yang mampu memecahkan masalah matematika berarti telah mencapai seluruh lapisan pemahaman matematis Pirie-Kieren ([Suindayati et al., 2019](#)). Dengan demikian indikasi tersebut perlu dikaji lebih mendalam.

Lapisan pemahaman matematis yang tidak dicapai oleh siswa mengakibatkan tidak berkembangnya strategi pemecahan masalah secara efisien seperti hasil studi pendahuluan karena siswa membutuhkan waktu yang lama dalam memecahkan masalah dan berpotensi menghasilkan jawaban yang salah. Hal tersebut sejalan dengan [Asih et al. \(2020\)](#) bahwa, tidak tercapainya lapisan pemahaman matematis juga berpotensi mengakibatkan kesalahan pada jawaban yang dihasilkan siswa. Lapisan pemahaman matematis yang lebih tinggi dapat dicapai dengan *scaffolding* karena *scaffolding* mengembangkan atau memperluas pengetahuan dan pemahaman siswa ([Darmawan & Yusuf, 2022](#)). Ketika lapisan pemahaman meningkat, potensi siswa mengalami kesalahan bahkan kegagalan dalam pemecahan masalah dapat terminimalisir. Dengan demikian, *scaffolding* memiliki posisi penting dalam belajar pemecahan masalah siswa.

Scaffolding adalah bantuan secukupnya kepada siswa untuk mengembangkan kemampuan dirinya secara optimal ([Darmawan & Yusuf, 2022](#)). [Gambar 3](#) menunjukkan posisi *scaffolding* dalam mengembangkan pemahaman matematis siswa.



Gambar 3. Posisi *Scaffolding*
Adaptasi dari ([Darmawan & Yusuf, 2022](#))

Zone actual (ZA) adalah zona yang merepresentasikan pengetahuan yang dapat dipahami oleh siswa secara mandiri. Sementara itu, *zone of proximal development* (ZPD) adalah daerah yang merepresentasikan pengetahuan yang dimiliki siswa karena adanya bantuan. *Scaffolding* berperan untuk menstimulasi pencapaian ZPD (Darmawan & Yusuf, 2022). Melalui *scaffolding* tersebut diharapkan dapat membantu siswa mencapai seluruh lapisan pemahaman matematis Pirie-Kieren. Keuntungan hasil kajian ini adalah guru dapat mengetahui lapisan pemahaman matematis yang dicapai siswa dan mengetahui *scaffolding* untuk membantu siswa mencapai seluruh lapisan pemahaman matematis Pirie-Kieren sebagai dasar perbaikan pembelajaran.

Penelitian-penelitian terdahulu telah dilakukan para ahli untuk perbaikan belajar siswa dan juga pembelajaran oleh guru. Penelitian terdahulu terkait lapisan pemahaman matematis berdasarkan teori Pirie-Kieren yang dilakukan para ahli di bidang pendidikan matematika yaitu, (1) penelitian yang dilakukan oleh Rahayuningsih & Sa'dijah (2018) bertujuan untuk mengidentifikasi lapisan pemahaman matematis dengan fokus masalah representasi bentuk pecahan dan dilakukan di Kota Batu, (2) penelitian yang dilakukan oleh Susiswo et al. (2023) bertujuan untuk mendeskripsikan pertumbuhan pemahaman matematis mahasiswa dengan fokus masalah limit fungsi dan berlokasi di Kota Malang. Sementara itu, penelitian terdahulu terkait *scaffolding* yang dilakukan para ahli di bidang pendidikan matematika yaitu, (1) penelitian yang dilakukan oleh Kusmaryono et al. (2020) bertujuan untuk menganalisis peningkatan hasil belajar siswa setelah pemberian *scaffolding*, mengevaluasi level *mathematics anxiety* siswa, dan menggambarkan peran *scaffolding* dalam perubahan persepsi siswa terhadap *mathematics anxiety* di kelas yang dilakukan di Kota Semarang, (2) penelitian yang dilakukan oleh Wulandari & Setianingsih (2018) bertujuan untuk menggambarkan kesulitan siswa dalam memecahkan masalah soal berpikir tingkat tinggi materi aljabar sebelum pemberian *scaffolding*, kemudian memberikan *scaffolding* untuk mengatasi kesulitan siswa dalam pemecahan masalah tersebut yang dilakukan di Kota Surabaya. Penelitian ini memiliki perbedaan dengan penelitian-penelitian sebelumnya, ditinjau dari segi subjek, fokus dan hasil penelitian, serta lokasi penelitian. Subjek penelitian ini adalah siswa kelas VIII SMPN 2 Sumbergepol, Kabupaten Tulungagung. Fokus penelitian ini adalah pencapaian lapisan pemahaman matematis Pirie-Kieren siswa dengan pemberian *scaffolding*.

Lapisan pemahaman matematis Pirie-Kieren dari siswa tidak dapat berada pada ZPD, jika peneliti tidak memberikan *scaffolding* kepada siswa. Padahal, lapisan pemahaman matematis tersebut penting untuk dicapai subjek agar memiliki kemampuan *problem-solving*, contohnya untuk memecahkan masalah pada AKM Numerasi. Jika lapisan pemahaman matematis statis, maka skor indikator numerasi pada AKM rendah, sehingga rapor pendidikan sekolah stagnan pada spektrum warna kuning atau merah (Musakirawati et al., 2023). Karena itu, tujuan penelitian ini adalah untuk mengungkap lapisan pemahaman matematis siswa dan memberikan *scaffolding* untuk mencapai seluruh lapisan pemahaman matematis Pirie-Kieren.

METODE

Penelitian ini merupakan penelitian kualitatif dengan jenis studi kasus jamak. Studi kasus jamak merupakan jenis penelitian yang mengkaji secara kolektif isu yang terdiri dari beberapa peristiwa dalam suatu penelitian (Candrama et al., 2023; Susiswo et al., 2024). Isu yang diteliti pada penelitian ini yaitu lapisan pemahaman matematis Pirie-Kieren dan pencapaiannya melalui *scaffolding* dari enam subjek dalam memecahkan masalah SPLDV. Lebih lanjut, penelitian ini juga mengkaji *scaffolding* yang baik untuk mencapai seluruh lapisan pemahaman matematis Pirie-Kieren.

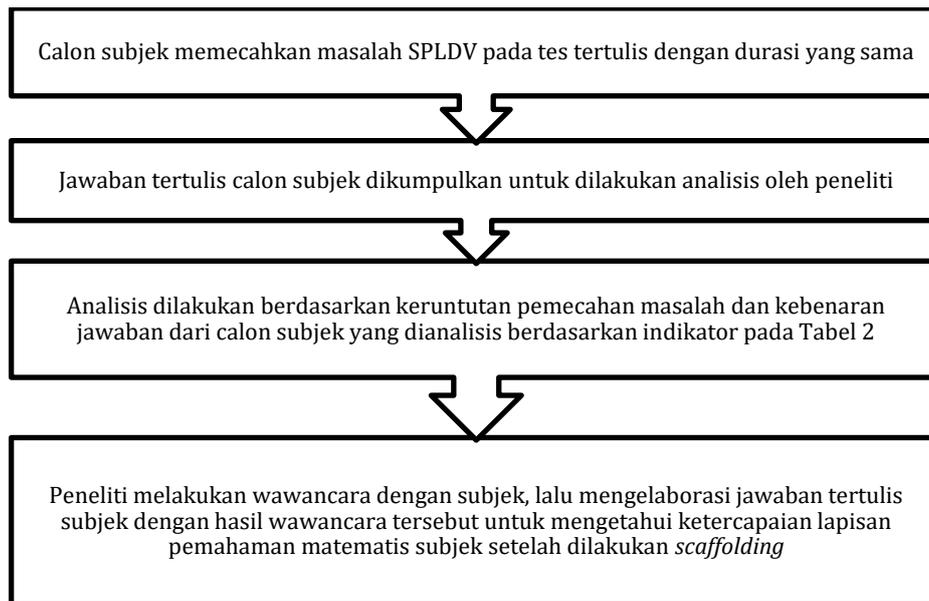
Lokasi penelitian adalah di SMPN 2 Sumbergempol karena merupakan sekolah penugasan peneliti dalam program Kampus Mengajar. Hal tersebut mengindikasikan bahwa rapor pendidikan sekolah berada pada spektrum warna kuning atau merah. Spektrum warna kuning menunjukkan kinerja cukup baik, sedangkan warna merah menunjukkan kinerja buruk (Nurdiansari & Utomo, 2023). Pemberian spektrum warna ditinjau dari 11 indikator, salah satunya numerasi (Musakirawati et al., 2023). Numerasi merupakan kegiatan menggunakan matematika untuk mengeksplorasi masalah dalam berbagai konteks (Kus, 2018). Masalah sehari-hari merupakan konteks yang sering digunakan dalam pengaplikasian konsep SPLDV. Jika siswa mampu memecahkan masalah tersebut secara terstruktur dan tepat, maka kemampuan numerasinya meningkat, sehingga membantu sekolah untuk mencapai spektrum warna hijau pada rapor pendidikan.

Subjek penelitian ini adalah siswa kelas VIII karena memiliki pengalaman belajar materi SPLDV. Pengalaman belajar merupakan syarat cukup untuk menganalisis lapisan pemahaman matematis yang dicapai siswa karena dapat memantik ide dalam memecahkan masalah (Darmawan, 2019). Subjek penelitian dipilih melalui teknik *snowball sampling*. Pemilihan tersebut dilakukan sedemikian hingga dihasilkan data jenuh (Darmawan & Yusuf, 2022). Karakteristik subjek penelitian disajikan pada Tabel 1.

Tabel 1. Karakteristik Subjek Penelitian

Kategori Subjek	Karakteristik Subjek	Alasan Pemilihan Subjek
S1	Siswa yang menuliskan langkah pemecahan secara terstruktur dan jawaban benar	Terindikasi telah mencapai seluruh lapisan pemahaman matematis, akan tetapi penting untuk menelusuri apakah subjek mengalami <i>folding back</i> dalam berpikir matematis dan apakah terdapat lapisan pemahaman matematis tertentu yang tidak dicapai subjek. Sehingga penting untuk memberikan <i>scaffolding</i> kepada subjek agar setiap lapisan pemahaman matematis tercapai secara sistematis.
S2	Siswa yang menuliskan langkah pemecahan secara terstruktur namun terdapat langkah yang salah sehingga jawabannya salah	Belum mencapai lapisan <i>inventising</i> , sehingga penting untuk memahami lapisan pemahaman matematis yang belum dicapai subjek dan memberikan <i>scaffolding</i> untuk membantu subjek mencapai setiap lapisan pemahaman matematis.
S3	Siswa yang menuliskan pemecahan secara tidak terstruktur, namun jawabannya benar	Mencapai lapisan <i>inventising</i> , namun terdapat lapisan tertentu yang belum dicapai subjek, sehingga penting untuk memahami lapisan pemahaman tersebut dan memberikan <i>scaffolding</i> untuk membantu subjek mencapai setiap lapisan pemahaman matematis.

Prosedur penelitian ini disajikan pada Gambar 4.



Gambar 4. Prosedur Penelitian

Instrumen penelitian ini terdiri dari peneliti, tes tertulis berupa masalah kontekstual SPLDV, pedoman wawancara semi-terstruktur, dan alat rekam audio. Instrumen penelitian divalidasi oleh dosen pendidikan matematika dengan pengalaman lebih dari 10 tahun sebagai validator ahli. Aspek instrumen penelitian yang divalidasi adalah kesesuaian instrumen dengan tujuan penelitian, bahasa yang digunakan dalam penulisan instrumen, dan kejelasan informasi dari instrumen. Keterkaitan antara instrumen soal dengan lapisan matematis dan indikator ketercapaian disajikan pada Tabel 2.

Tabel 2. Keterkaitan Instrumen Soal dengan Lapisan Matematis Pirie-Kieren dan Indikator Ketercapaiannya.

Instrumen Soal	Lapisan Pemahaman Matematis	Indikator Ketercapaian Lapisan Pemahaman Matematis Subjek
Alfian dan Asca merupakan kakak beradik, di mana Alfian adalah kakak dan Asca adalah adik. Jika jumlah usia mereka saat ini adalah 25 tahun dan dalam lima tahun ke depan usia Alfian akan menjadi dua kali usia Asca saat ini, maka:		
a. Tuliskan informasi yang diketahui pada masalah.	<i>Primitive knowing</i> (usaha subjek dalam memahami definisi baru)	Subjek dapat menyebutkan informasi pada masalah.
b. Tuliskan permisalan usia Alfian dan Asca menggunakan variabel tertentu.	<i>Image making</i> (subjek menciptakan pemahaman dari pengetahuan sebelumnya, lalu menggunakannya dengan cara baru)	Subjek dapat membuat permisalan usia Alfian dan usia Asca dalam suatu variabel.
c. Tuliskan pemodelan matematika dari jumlah usia Alfian dan Asca saat ini.	<i>Image having</i> (subjek membuat gambaran terkait suatu permasalahan)	Subjek memaknai arti “Jumlah usia Alfian dan Asca saat ini sama dengan 25 tahun” dalam bentuk PLDV, yaitu: $x + y = 25$
d. Tuliskan pemodelan matematika dari usia Alfian lima tahun ke depan menjadi dua kali usia Asca saat ini.	<i>Image having</i> (subjek membuat gambaran terkait suatu permasalahan)	Subjek memaknai arti “Usia Alfian pada lima tahun mendatang sama dengan usia Asca sekarang” dalam bentuk PLDV, yaitu: $5 + x = 2y$

Instrumen Soal	Lapisan Pemahaman Matematis	Indikator Ketercapaian Lapisan Pemahaman Matematis Subjek
e. Tuliskan bentuk sistem persamaan linear dua variabel dari permasalahan di atas.	<i>Property noticing</i> (subjek mengombinasikan berbagai aspek dari permasalahan untuk membentuk sifat yang relevan dengan permasalahan)	Subjek dapat membuat SPLDV, yaitu: $x + y = 25$ (1) $5 + x = 2y$ (2))
f. Tentukanlah masing-masing usia Alfian dan Asca saat ini.	<i>Formalizing</i> (subjek membuat abstraksi konsep matematika berdasarkan sifat yang ada) <i>Observing</i> (siswa menghubungkan aktivitas pada lapisan <i>formalizing</i> , sehingga dapat diaplikasikan dalam permasalahan)	Subjek menghasilkan nilai variabel x atau y menggunakan metode eliminasi, substitusi, atau campuran, sehingga diperoleh usia Alfian=15 tahun dan usia Asca=10 tahun.
g. Bagaimana cara kalian untuk membuktikan kebenaran usia Alfian dan Asca saat ini yang telah kalian peroleh pada poin f?	<i>Structuring</i> (subjek membuat keterkaitan antar teorema dan membuktikan kebenaran hubungannya)	Subjek mensubstitusikan nilai variabel yang diperoleh ke dalam PLDV untuk membuktikan kebenaran jawaban.
h. Dari proses penyelesaian masalah yang Anda lakukan, dapatkah Anda memunculkan pertanyaan atau gagasan baru?	<i>Inventising</i> (subjek memiliki pemahaman terstruktur dan memiliki pertanyaan baru yang dapat menumbuhkan konsep baru)	Subjek dapat memunculkan pertanyaan atau gagasan baru dari pemecahan masalah yang ditemukan.

Adaptasi dari (Susiswo et al, 2023)

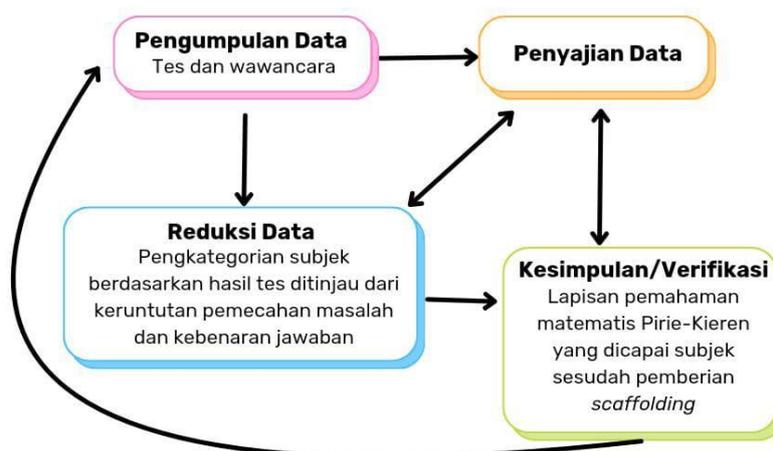
Sementara itu, rincian *scaffolding* yang diberikan kepada subjek dalam penelitian ini disajikan pada Tabel 3.

Tabel 3. Rincian *Scaffolding*

No	Momen Pemberian <i>Scaffolding</i>	Bentuk <i>Scaffolding</i>	Metode <i>Scaffolding</i>	Tujuan <i>Scaffolding</i>
1	Setelah subjek melakukan kesalahan dalam menjawab pertanyaan	Pertanyaan	Disampaikan melalui petunjuk berupa pertanyaan pemantik	Subjek dapat menggali pengetahuannya untuk memperbaiki kesalahannya.
2	Setelah subjek melakukan kesalahan dalam menjawab pertanyaan	Penjelasan	Disampaikan secara langsung dengan memberikan contoh pemecahan masalah sejenis	Subjek dapat mengaplikasikan konsep pemecahan masalah pada contoh yang diberikan oleh Peneliti untuk memperbaiki kesalahannya.
3	Setelah subjek melakukan kesalahan dalam menjawab pertanyaan	Penjelasan	Disampaikan secara langsung dengan cara memberikan umpan balik atas jawaban yang diberikan subjek	Subjek tidak hanya dapat memperbaiki kesalahannya, namun juga dapat meningkatkan pengetahuannya.

Peneliti menggunakan instrumen wawancara semi-terstruktur untuk menggali informasi yang belum terungkap dari jawaban tertulis subjek. Sumber data penelitian adalah siswa yang menjadi subjek penelitian. Sumber data menghasilkan data berupa jawaban masalah matematika secara tertulis dan rekaman wawancara semi-terstruktur. Melalui sumber data tersebut, lapisan pemahaman matematis Pirie-Kieren siswa dan pencapaiannya melalui *scaffolding* dapat diungkap.

Teknik analisis data kualitatif yang digunakan dalam penelitian ini adalah interaktif (Miles & Huberman, 1994). Teknik analisis data interaktif disajikan pada Gambar 5.



Gambar 5. Teknik Analisis Data Interaktif

Pengumpulan data dilakukan dengan pemberian tes dan wawancara. Peneliti memberikan tes tertulis kepada calon subjek. Data yang terkumpul, selanjutnya dianalisis menggunakan indikator ketercapaian lapisan pemahaman matematis pada Tabel 2. Reduksi data dilakukan dengan memilih enam subjek yang mewakili kategori pada Tabel 1. Lalu peneliti mengelaborasi jawaban tes dengan wawancara terhadap subjek. Penyajian data dilakukan dengan menyajikan jawaban tertulis dan hasil wawancara dari setiap subjek, kemudian dielaborasi sehingga tersaji deskripsi lapisan pemahaman matematis Pirie-Kieren subjek dan pencapaiannya melalui *scaffolding* dari setiap subjek. Selanjutnya, peneliti menarik kesimpulan terhadap lapisan pemahaman matematis yang dicapai subjek sesudah pemberian *scaffolding* pada penelitian ini.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Hasil Penelitian

Lapisan pemahaman matematis Pirie-Kieren dan pencapaiannya melalui *scaffolding* dari setiap subjek dalam memecahkan masalah kontekstual SPLDV dikaji melalui analisis terhadap jawaban tertulis dan hasil rekaman wawancara.

Kategori S1 Mencapai Lapisan *Inventising* pada Pemecahan Masalah Kontekstual SPLDV

Terlibatnya lapisan pemahaman matematis Pirie-Kieren pada S1A dan S1B dalam menghasilkan jawaban tertulis disajikan pada Tabel 4.

Tabel 4. Jawaban Tertulis S1A dan S1B

Jawaban Tertulis S1A	Jawaban Tertulis S1B
<p>a. Diketahui :- Jumlah usia mereka (Alfian dan Asca) saat ini = 25 tahun - dalam lima tahun ke depan usia Alfian akan menjadi dua kali usia Asca saat ini.</p>	<p>a. Diketahui :- Jumlah usia mereka (Alfian dan Asca) Saat ini 25 tahun - dalam lima tahun ke depan usia Alfian akan menjadi dua kali usia Asca Saat ini</p>
<p>b. Formulasikan usia Alfian dan Asca Usia Alfian = x Usia Asca = y</p>	<p>Formulasikan Usia Alfian dan Asca Usia Alfian = x Usia Asca = y</p>
<p>c. $x + y = 25$ d. $5 + x = 2y$</p>	<p>e. Bentuk SPLDV $x + y = 25 \dots (1)$ $5 + x = 2y \dots (2)$</p>
<p>f. $x + y = 25$ $x + 2y = -5$ $3y = 30$ $y = 10$</p>	<p>f. $x + y = 25$ $5 + x = 2y$ $5 + 25 = 2y$ $30 = 2y$ $y = 15$</p>
<p>g. $y = 10 \rightarrow 5 + x = 2y$ $5 + x = 20$ $x = 20 - 5$ $x = 15$</p>	<p>g. $y = 10 \rightarrow 5 + x = 2y$ $5 + x = 20$ $x = 20 - 5$ $x = 15$</p>
<p>h. Dengan meninjau kembali menggunakan cara lain (Substitusi).</p>	<p>h. Dengan meninjau kembali menggunakan Cara lain (Substitusi)</p>
<p>Substitusi: $x + y = 25 \dots (1) \rightarrow x = 25 - y \dots (ii)$ $5 + x = 2y \dots (ii)$ Substitusi (ii) ke (i) $5 + 25 - y = 2y$ $30 = 2y$ $10 = y \rightarrow x + y = 25$ $x + 10 = 25$ $x = 15$</p>	<p>Substitusi: $x + y = 25 \dots (i) \rightarrow x = 25 - y \dots (iii)$ $5 + x = 2y \dots (ii)$ Substitusi (iii) ke (ii) $5 + 25 - y = 2y$ $30 = 3y$ $10 = y \rightarrow x + y = 25$ $x + 10 = 25$ $x = 15$</p>
<p>i. Gagasan baru a) Usia Alfian = a } $a + b = 25 \dots (1)$ Usia Asca = b } $5 + a = 2b \dots (2) \rightarrow a - 2b = -5$ Pakai eliminasi a $a + b = 25$ $a - 2b = -5$ $3b = 30$ $b = 10 \rightarrow a + 10 = 25$ $a = 25 - 10$ $a = 15$ Jadi tetap bahwa usia Alfian = 15 tahun dan usia asca = 10 tahun</p>	<p>i. Gagasan Baru Diket : - Usia Asca ditambah usia Alfian = 25 tahun - Usia Alfian pada 5 tahun mendatang = 2 kali usia Asca saat ini Ditanya : Usia Alfian dan Asca saat ini berturut-turut adalah ... Dijawab : Misal : Usia Asca = x } maka $x + y = 25 \dots (1)$ Usia Alfian = y } $y + 5 = 2x \dots (2) \rightarrow -2x + y = -5$ eliminasi y $x + y = 25$ $-2x + y = -5$ $3x = 20$ $x = 20/3$ Substitusi x=0 ke (1) $0 + y = 25$ $y = 25$ Jadi : Usia Asca = $x = 10$ Usia Alfian = $y = 15$</p>
<p>Substitusi (ii) ke (i) $5 + 25 - y = 2y$ $30 = 2y$ $10 = y \rightarrow x + y = 25$ $x + 10 = 25$ $x = 15$</p>	<p>Substitusi (iii) ke (ii) $5 + 25 - y = 2y$ $30 = 3y$ $10 = y \rightarrow x + y = 25$ $x + 10 = 25$ $x = 15$</p>
<p>g. $y = 10 \rightarrow 5 + x = 2y$ $5 + x = 20$ $x = 20 - 5$ $x = 15$</p>	<p>g. $y = 10 \rightarrow 5 + x = 2y$ $5 + x = 20$ $x = 20 - 5$ $x = 15$</p>
<p>h. Dengan meninjau kembali menggunakan cara lain (Substitusi).</p>	<p>h. Dengan meninjau kembali menggunakan Cara lain (Substitusi)</p>
<p>Substitusi: $x + y = 25 \dots (1) \rightarrow x = 25 - y \dots (ii)$ $5 + x = 2y \dots (ii)$ Substitusi (ii) ke (i) $5 + 25 - y = 2y$ $30 = 2y$ $10 = y \rightarrow x + y = 25$ $x + 10 = 25$ $x = 15$</p>	<p>Substitusi: $x + y = 25 \dots (i) \rightarrow x = 25 - y \dots (iii)$ $5 + x = 2y \dots (ii)$ Substitusi (iii) ke (ii) $5 + 25 - y = 2y$ $30 = 3y$ $10 = y \rightarrow x + y = 25$ $x + 10 = 25$ $x = 15$</p>
<p>i. Gagasan baru a) Usia Alfian = a } $a + b = 25 \dots (1)$ Usia Asca = b } $5 + a = 2b \dots (2) \rightarrow a - 2b = -5$ Pakai eliminasi a $a + b = 25$ $a - 2b = -5$ $3b = 30$ $b = 10 \rightarrow a + 10 = 25$ $a = 25 - 10$ $a = 15$ Jadi tetap bahwa usia Alfian = 15 tahun dan usia asca = 10 tahun</p>	<p>i. Gagasan Baru Diket : - Usia Asca ditambah usia Alfian = 25 tahun - Usia Alfian pada 5 tahun mendatang = 2 kali usia Asca saat ini Ditanya : Usia Alfian dan Asca saat ini berturut-turut adalah ... Dijawab : Misal : Usia Asca = x } maka $x + y = 25 \dots (1)$ Usia Alfian = y } $y + 5 = 2x \dots (2) \rightarrow -2x + y = -5$ eliminasi y $x + y = 25$ $-2x + y = -5$ $3x = 20$ $x = 20/3$ Substitusi x=0 ke (1) $0 + y = 25$ $y = 25$ Jadi : Usia Asca = $x = 10$ Usia Alfian = $y = 15$</p>
<p>b) Mengganti informasi → usia Alfian dan usia asca jika dijumlahkan = 25 → usia Alfian 5 tahun mendatang sama dg 2 kali usia Asca 5 tahun mendatang. Coba anggap : $x = \text{Usia Alfian} \rightarrow x + y = 25 \dots (1)$ $y = \text{Usia Asca} \rightarrow x + 5 = 2y + 5 \dots (2) \rightarrow x - 2y = 5 - 5$ eliminasi x $x + y = 25$ $x - 2y = 0$ $3y = 25$ $y = 25/3 = 8,3 \text{ tahun}$ Substitusi y ke (1) $\rightarrow x + y = 25$ $x + 8,3 = 25$ $x = 25 - 8,3$ $x = 16,7 \text{ tahun}$ Jadi : usia Alfian = 16,7 tahun dan usia Asca = 8,3 tahun untuk saat ini, ... cha nilai x dan y nya berbeda dari masalah sebelumnya.</p>	<p>b) Mengganti informasi → usia Alfian dan usia asca jika dijumlahkan = 25 → usia Alfian 5 tahun mendatang sama dg 2 kali usia Asca 5 tahun mendatang. Coba anggap : $x = \text{Usia Alfian} \rightarrow x + y = 25 \dots (1)$ $y = \text{Usia Asca} \rightarrow x + 5 = 2y + 5 \dots (2) \rightarrow x - 2y = 5 - 5$ eliminasi x $x + y = 25$ $x - 2y = 0$ $3y = 25$ $y = 25/3 = 8,3 \text{ tahun}$ Substitusi y ke (1) $\rightarrow x + y = 25$ $x + 8,3 = 25$ $x = 25 - 8,3$ $x = 16,7 \text{ tahun}$ Jadi : usia Alfian = 16,7 tahun dan usia Asca = 8,3 tahun untuk saat ini, ... cha nilai x dan y nya berbeda dari masalah sebelumnya.</p>

Dihasilkannya gagasan baru dari pemecahan masalah yang ditemukan S1A dan S1B ditandai dengan persegi panjang ungu pada Tabel 4 mengindikasikan S1A dan S1B mencapai lapisan *inventising*. Lapisan *primitive knowing*, *image making*, dan *property noticing* terlibat jelas dalam jawaban tertulis subjek karena memenuhi indikator pada Tabel 2. Sementara itu, untuk lima lapisan lainnya juga terindikasi dicapai subjek, namun perlu elaborasi dengan hasil wawancara peneliti untuk memastikan ketercapaian indikator lapisan pemahaman matematis pada Tabel 2. Lebih jauh, dalam berpikir matematis memungkinkan terjadinya *folding back* yang memicu kembalinya berpikir subjek pada lapisan sebelumnya. Tercapainya lapisan pemahaman matematis dan terjadinya *folding back*, terungkap melalui wawancara Peneliti kepada S1A dan S1B pada Tabel 5.

Tabel 5. Hasil Wawancara S1A dan S1B

S1A	S1B
<p>Peneliti : Apa arti $x + y = 25$ dan $5 + x = 2y$?</p> <p>S1A : <u>Usia Asca + Usia Alfian = 25, dan 5 tahun kedepan + usia Alfian = 2 x usia Asca.</u></p>	<p>Peneliti : Apa arti $x + y = 25$ dan $5 + x = 2y$?</p> <p>S1B : <u>$x + y = 25$ adalah Jumlah usia Alfian dan Asca, sedangkan $5 + x = 2y$ adalah 5 tahun kedepan usia Alfian menjadi dua kali usia Asca.</u></p>
<p>Peneliti : Kamu memakai metode apa untuk mencari x dan y?</p> <p>S1A : <u>Metode campuran, dieleminasi x-nya, diperoleh $y = \frac{30}{3} = 10$</u></p>	<p>Peneliti : Kamu pakai cara apa untuk menghasilkan x, y?</p> <p>S1B : <u>Campuran</u></p>
<p>Peneliti : Kamu mencari x dengan cara apa?</p> <p>S1A : <u>[Substitusi y ke persamaan $2y$].</u></p>	<p>Peneliti : Apa yang kamu lakukan sehingga $y = \frac{30}{3} = 10$?</p> <p>S1B : <u>Dieliminasi kemudian dikurangi, lalu mencari x dengan substitusi</u></p>
<p>Peneliti : Persamaan $2y$? tapi PLDVnya tadi persamaan (1) dan (2)?</p> <p>S1A : <u>[Oh, persamaan (2)]</u></p> <p>Peneliti : Sehingga x berapa?</p> <p>S1A : <u>15</u></p> <p>Peneliti : Untuk membuktikan kebenaran jawaban, kamu menggunakan cara apa?</p>	<p>Peneliti : Berarti $x = 15$ dan $y = 10$ merupakan usia Alfian dan Asca dalam 5 tahun mendatang?</p> <p>S1B : <u>[Iya]</u></p> <p>Peneliti : Yakin?</p> <p>S1B : <u>[Yakin]</u></p> <p>Peneliti : Nilai x dan y yang dicari bukan usia Alfian dalam 5 tahun ke depan. Melainkan, usia Alfian dan usia Asca sekarang. Kalau usianya dalam 5 tahun kedepan, berarti masing-masing usianya $x = 15$ dan $y = 10$, itu ditambah berapa?</p>
<p>S1A : <u>Menggunakan cara lain, yaitu substitusi.</u></p> <p>Peneliti : Kira-kira dari proses pemecahan masalah yang telah kamu lakukan, dapatkah kamu memunculkan pertanyaan atau gagasan baru?</p> <p>S1A : <u>[Saya menemukan bahwa, "jika kita mengganti permissalan variabel yang mulanya x menjadi a dan y menjadi b, nanti diperoleh usia Alfian dan usia Asca tetap 15 dan 10 kak. Tapi ketika saya merubah informasi pada masalah itu kan model matematikanya jadi beda, sehingga usia Alfian dan usia Asca yang saya peroleh itu bukan lagi 15 dan 10]</u></p>	<p>S1B : <u>[Lima]</u></p> <p>Peneliti : Kamu membuktikan jawaban kamu benar dengan cara?</p> <p>S1B : <u>Menghitung kembali menggunakan substitusi</u></p> <p>Peneliti : Apakah x dan y yang kamu peroleh dengan cara lain sama?</p> <p>S1B : <u>Sama.</u></p> <p>Peneliti : Kira-kira dari proses pemecahan masalah yang telah kamu lakukan, dapatkah kamu memunculkan pertanyaan atau gagasan baru?</p> <p>S1B : <u>[Ada kak, jika saya salah dalam membaca informasi pada soal dengan menganggap Asca sebagai kakak dan Alfian sebagai adik, apakah nanti akan menyebabkan perbedaan nilai x dan y dari informasi sebelumnya?]</u></p>
<p>Peneliti : Coba kamu tulis pemecahan masalah sesuai gagasan mu itu.</p> <p>S1A : <u>Oke kak ini.</u></p> <p>Peneliti : Coba kamu jelaskan</p> <p>S1A : <u>[Jadi, ketika saya mengganti informasi bahwa, usia Alfian lima tahun mendatang sama dengan dua kali usia Asca lima tahun mendatang, dan jumlah usia mereka adalah 25 tahun, saya menemukan bahwa usia Alfian = $x = 16,7$ tahun dan usia Asca = $y = 8,3$ tahun untuk saat ini]</u></p>	<p>Peneliti : Coba kamu tulis dulu pemecahan masalahnya untuk mengetahui jawaban dari pertanyaanmu.</p> <p>S1B : <u>[Jika saya merubah informasi bahwa Asca adalah kakak dan Alfian adalah adik, saya menemukan bahwa usia Asca = 15 dan usia Alfian = 10]</u></p> <p>Peneliti : Apakah usia Alfian dan usia Asca tersebut sama dengan usia mereka pada masalah sebelumnya?</p>

S1A		S1B	
Peneliti	: Oh iya, jadi gagasan kamu itu kalau hanya merubah permisalan variabel x menjadi a dan variabel y menjadi b itu hasilnya tetap kan?	S1B	: [Berbeda kak]
S1A	: [Iya]	Peneliti	: Jadi, apa gagasan yang kamu peroleh?
Peneliti	: Tapi kalau informasinya kamu ubah dengan informasi yang berbeda berarti hasilnya berbeda karena pemodelan matematikanya berbeda?	S1B	: [Kalau kita membaca informasi pada masalah atau mengubah informasi pada masalah, maka nanti hasil yang kita dapat akan berbeda dengan informasi mula-mula pada masalah]
S1A	: [Iya]		

Pernyataan dicetak tebal dan digarisbawahi pada Tabel 5 menunjukkan S1A dan S1B terindikasi mencapai lapisan *image having*. Hal itu karena, S1A memahami makna pernyataan yang diketahui pada masalah sehingga dapat membuat pemodelan PLDV-nya. Pernyataan tersebut telah memenuhi indikator *image having* bagian c, namun belum memenuhi indikator *image having* bagian d, sehingga perlu pengkajian kembali melalui pertanyaan lanjutan pada wawancara. Lebih lanjut, pernyataan yang hanya dicetak tebal pada Tabel 5 menunjukkan S1A dan S1B mencapai lapisan *formalizing* dan *observing* karena mampu menghasilkan nilai variabel x dan y menggunakan metode campuran dengan tepat. Akan tetapi, pada pernyataan dicetak tebal dan [] pada Tabel 5 menunjukkan S1A mengalami *folding back* ke lapisan *image having*. Hal tersebut karena, S1A menganggap $2y$ pada $5 + x = 2y$ merupakan persamaan. Hal ini membuktikan bahwa, S1A belum memenuhi indikator *image having* bagian d. Lebih lanjut, pada pernyataan dicetak tebal dan [] pada Tabel 5, S1B juga mengalami *folding back* ke lapisan *primitive knowing*. Hal itu karena, S1B memberikan jawaban yang salah ketika peneliti memantik pemahamannya terkait informasi pada masalah. Hal ini membuktikan bahwa indikasi awal berdasarkan jawaban tertulis subjek terkait ketercapaian seluruh lapisan pemahaman *primitive knowing* tidak valid.

Tidak tercapainya lapisan *image having* oleh S1A dan tidak tercapainya lapisan *primitive knowing* oleh S1B melatarbelakangi peneliti untuk memberikan *scaffolding*. Setelah pemberian *scaffolding*, S1A menyadari kesalahannya pada pernyataan bertanda cetak tebal, bergaris bawah, dan [] pada Tabel 5, sehingga S1A mencapai lapisan *image having*. Sementara itu, setelah pemberian *scaffolding* S1B juga menyadari kesalahannya dan mencapai lapisan *primitive knowing* pada pernyataan Tabel 5 yang ditandai dengan [] dan digarisbawahi. Lebih lanjut, pernyataan yang hanya digarisbawahi pada Tabel 5 menunjukkan S1A dan S1B mencapai lapisan *structuring* karena membuktikan kebenaran nilai variabel x dan y . Sementara itu, pernyataan yang ditandai dengan [] menunjukkan S1A dan S1B mencapai lapisan *inventising* karena dapat memunculkan pertanyaan atau gagasan baru.

Kategori S2 Belum Mencapai Lapisan Terluar (*Inventing*) pada Pemecahan Masalah Kontekstual SPLDV

Terlibatnya lapisan pemahaman matematis Pirie-Kieren pada subjek dalam menghasilkan jawaban tertulis disajikan pada Tabel 6.

Tabel 6. Jawaban Tertulis S2A dan S2B

S2A	S2B														
<p>1. a. diketahui usia mereka 25 tahun</p> <p>b. Permisalan usia Alfian dan Asca</p> <p>Misalkan: Usia Alfian = x Usia Asca = y</p> <p>c. $x + y = 25$</p> <p>d. $5 + x = 2y$</p> <p>e. Bentuk SPLDV</p> <p>$x + y = 25 \dots (1)$ $5 + x = 2y \dots (2)$</p> <p>f. Campuran</p> <table style="border: none;"> <tr> <td>$x + y = 25$</td> <td>$y = 10 \rightarrow 5 + x = 2y$</td> </tr> <tr> <td>$5 + x = 2y$</td> <td>$5 + x = 20$</td> </tr> <tr> <td>$x + y = 25$</td> <td>$x = 20 - 5$</td> </tr> <tr> <td>$x - 2y = -5$</td> <td>$x = 15$</td> </tr> </table> <p>g. Menggunakan cara lain seperti Eliminasi dan Substitusi</p> <p>Gagasan Baru</p> <p>Diketahui: Alfian dan Asca saat ini = 31 th Usia Alfian 5 th kedepan adalah dua kali usia Asca saat ini Ditanya: Usia Alfian dan usia Asca berapakah? Saat ini Dijawab: Misal: $x = \text{Usia Alfian}$ $y = \text{Usia Asca}$</p> $\begin{cases} x + y = 31 \dots (1) \\ 5 + x = 2y \dots (2) \rightarrow x - 2y = -5 \end{cases}$ <p>Eliminasi:</p> $\begin{array}{r} x + y = 31 \\ x - 2y = -5 \\ \hline 3y = 36 \\ y = 12 \end{array}$ <p>Substitusi ke (1):</p> $x + 12 = 31 \rightarrow x = 31 - 12 = 19$ <p>Jadi, usia Alfian saat ini = 19 th Usia Asca saat ini = 12 th</p>	$x + y = 25$	$y = 10 \rightarrow 5 + x = 2y$	$5 + x = 2y$	$5 + x = 20$	$x + y = 25$	$x = 20 - 5$	$x - 2y = -5$	$x = 15$	<p>a. diketahui usia mereka 25 tahun</p> <p>b. Permisalan usia Alfian dan Asca</p> <p>Misalkan: Usia Alfian = x Usia Asca = y</p> <p>c. $x + y = 25$</p> <p>d. $5 + x = 2y$</p> <p>e. Bentuk SPLDV</p> <p>$x + y = 25 \dots (1)$ $5 + x = 2y \dots (2)$</p> <p>f. Campuran</p> <table style="border: none;"> <tr> <td>$x + y = 25$</td> <td>$x - 2y = -5$</td> </tr> <tr> <td>$3y = 30$</td> <td>$y = 10$</td> </tr> <tr> <td>$y = 10$</td> <td>$x = 15$</td> </tr> </table> <p>g. Menggunakan cara lain seperti Eliminasi dan Substitusi</p> <p>Mulit! Gagasan baru</p> <p>Diket:</p> <p>Misalkan: $x = \text{usia Alfian}$ $y = \text{usia Asca}$</p> $\begin{cases} x + y = 31 \dots (1) \\ 5 + x = 2y \dots (2) \rightarrow x - 2y = -5 \end{cases}$ <p>Eliminasi:</p> $\begin{array}{r} x + y = 31 \\ x - 2y = -5 \\ \hline 3y = 36 \\ y = 12 \end{array}$ <p>Substitusi ke (1):</p> $x + 12 = 31 \rightarrow x = 31 - 12 = 19$ <p>Jadi, usia Alfian = 19 dan usia Asca = 12</p>	$x + y = 25$	$x - 2y = -5$	$3y = 30$	$y = 10$	$y = 10$	$x = 15$
$x + y = 25$	$y = 10 \rightarrow 5 + x = 2y$														
$5 + x = 2y$	$5 + x = 20$														
$x + y = 25$	$x = 20 - 5$														
$x - 2y = -5$	$x = 15$														
$x + y = 25$	$x - 2y = -5$														
$3y = 30$	$y = 10$														
$y = 10$	$x = 15$														

Jawaban tertulis S2A dan S2B pada Tabel 6 bertanda ellipsis merah merupakan gagasan baru yang dihasilkan subjek setelah pemberian *scaffolding* dari peneliti pada Tabel 7 bertanda [] dan digarisbawahi. Hal itu mengartikan bahwa S2A dan S2B awalnya tidak mencapai lapisan matematis terluar (*inventing*). Sementara itu, lapisan *primitive knowing*, *image making*, dan *property noticing* terlibat jelas dalam jawaban tertulis S2A dan S2B karena memenuhi indikator pada Tabel 2. Kemudian, tiga lapisan lainnya juga terindikasi dicapai S2A dan S2B, namun perlu elaborasi dengan hasil wawancara peneliti untuk memastikan ketercapaian indikator lapisan pemahaman matematis pada Tabel 2. Lebih jauh, peneliti memberikan *scaffolding* untuk membantu S2A dan S2B mencapai setiap lapisan pemahaman matematis Pirie-Kieren. Tercapainya lapisan pemahaman matematis sebelum dan sesudah dilakukannya *scaffolding* terungkap melalui wawancara kepada subjek S2A dan S2B pada Tabel 7.

Tabel 7. Hasil Wawancara S2A dan S2B

S2A	S2B
Peneliti : Baca kembali masalahnya. Apakah usia Alfian 5 tahun ke depan ditanyakan pada masalah?	Peneliti : Kamu membuat pemodelan PLDV $x + y = 25$ dan $5 + x = 2y$, maksudnya?
S2A : <u>[Iya ditanyakan, eh diketahui].</u>	S2B : [$x + y = 25$ umur mereka berdua, kalau $5 + x = 2y$ itu 25]
Peneliti : Kamu membuat PLDV $x + y = 25$ dan $5 + x = 2y$, maksudnya?	Peneliti : 25? Ini $5 + x = 2y$, Jadi apa?
S2A : <u>$x + y = 25$ adalah usia Alfian dan Asca sekarang, sedangkan $5 + x = 2y$ adalah Usia Alfian 5 tahun mendatang adalah dua kali usia Asca sekarang.</u>	S2B : <u>[5 tahun kedepannya, usia Asca 2 kali lebih tua dari usianya Asca]</u>
Peneliti : Kamu pakai cara apa?	Peneliti : Usia Asca atau Alfian?
S2A : <u>Campuran, dengan eliminasi x, sehingga $y = 10$, lalu substitusi $y = 10$ ke persamaan, ketemu $x = 15$</u>	S2B : <u>[Alfian]</u>
Peneliti : Bagaimana cara membuktikan jawabanmu benar?	Peneliti : Kamu mencari x,y nya dengan cara?
S2A : <u>Menggunakan cara lain, yaitu eliminasi dan substitusi</u>	S2B : [Campuran, dengan mengurangi usia sebelemunya].
Peneliti : Jika menggunakan eliminasi dan substitusi hasilnya sama, maka jawaban kamu berarti?	Peneliti : Mana usia sebelumnya?
S2A : <u>Benar</u>	S2B : <u>[Menggunakan eliminasi, bukan usia sebelumnya]</u>
Peneliti : Kira-kira dari proses penyelesaian masalah yang telah kamu lakukan, dapatkah kamu memunculkan pertanyaan atau gagasan baru?	Peneliti : Kamu mengeliminasi x atau y?
S2A : <u>[Waduh, saya bingung kak mau tanya apa, yang jelas saya menemukan bahwa usia Alfian adalah 15 tahun dan usia Asca adalah 10 tahun]</u>	S2B : <u>x dan y, eh y, eh x, sehingga $y=10$.</u>
Peneliti : Coba jika kamu mengganti informasi pada masalah tersebut, apakah kamu dapat menemukan usia Alfian=15 dan usia Asca tetap 10 tahun?	Peneliti : $y = 10$, tapi kamu mensubstitusikannya menjadi?
S2A : Oke kak.	S2B : [$5 + x = 2y$]
Peneliti : Jadi bagaimana gagasan baru yang kamu dapatkan?	Peneliti : $y = 15$ dan $y = 10$, kenapa ada 2 nilai y? Jadi 10 itu x atau y?
S2A : <u>[Ehm, dihasilkan usia Alfian dan usia Asca berbeda kak. Ketika saya ganti informasinya bahwa, jika usia Alfian ditambah usia Asca adalah 31 tahun, lalu usia Alfian lima tahun ke depan adalah dua kali usia Asca saat ini, maka usia Alfian dan usia Asca saat ini adalah 19 dan 12 tahun]</u>	S2B : <u>[$x=15$].</u>
	Peneliti : Kamu membuktikan jawabanmu benar pakai cara?
	S2B : <u>Cara lain, eliminasi dan substitusi</u>
	Peneliti : Ketika kamu menggunakan cara lain dan diperoleh jawaban sama, berarti jawabanmu benar atau salah?
	S2B : <u>[Benar]</u>
	Peneliti : Kira-kira dari proses penyelesaian masalah yang telah kamu lakukan, dapatkah kamu memunculkan pertanyaan atau gagasan baru?
	S2B : [Saya tidak ada pertanyaan kak]
	Peneliti : Misalkan kamu coba ganti informasi di soal, apakah nanti usia Alfian dan usia Asca itu berturut-turut tetap 15 tahun dan 10 tahun?
	S2B : [Iya kak sepertinya]
	Peneliti : Kenapa kok iya?
	S2B : [Hehe nggak tahu kak]
	Peneliti : Oke coba kamu ganti informasi pada soalnya
	S2B : <u>[Oke, misal usia Alfian ditambah usia Asca 19 ya kak, dan dua kali usia Asca saat ini adalah usia Alfian lima tahun ke depan]</u>

S2A	S2B
	Peneliti : Oke silahkan, bagaimana hasilnya?
	S2B : <u>[Saya menemukan usia Alfian menjadi 11 tahun dan usia Asca menjadi 8 tahun. Ini berbeda kak dengan yang tadi. Jadi, jika informasi yang diberikan itu berbeda meskipun menggunakan variabel yang sama, maka hasilnya tetap beda]</u>

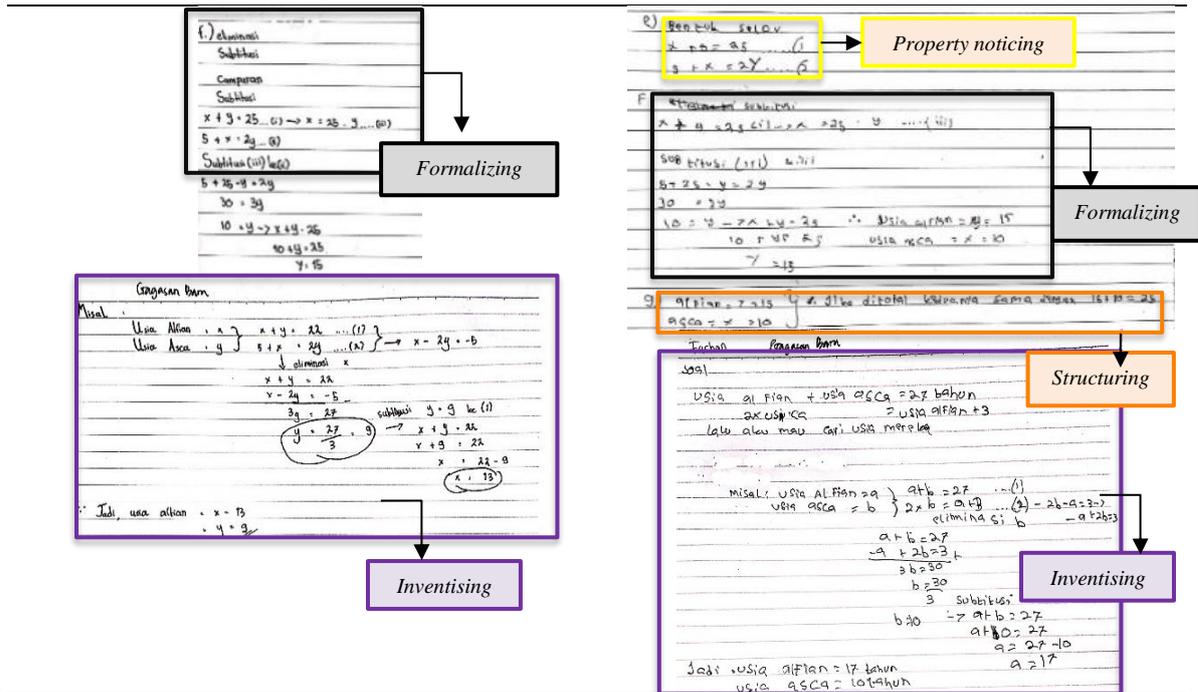
Pernyataan yang ditandai dengan [] pada Tabel 7, menunjukkan kesalahan S2A dan S2B dalam pemecahan masalah. Pernyataan dicetak tebal dan digarisbawahi pada Tabel 7 menunjukkan S2A dan S2B mencapai lapisan *image having*. S2A dan S2B memahami makna informasi pada masalah sehingga dapat membuat pemodelan PLDV-nya. Lebih lanjut, pernyataan yang hanya dicetak tebal pada Tabel 7 menunjukkan S2A mencapai lapisan *formalizing* dan *observing* karena mampu menghasilkan nilai variabel x dan y menggunakan metode campuran dengan benar. Sedangkan S2B mencapai lapisan *formalizing*, karena hanya menghasilkan nilai variabel y . Akan tetapi, setelah dilakukan *scaffolding*, S2B dapat menghasilkan nilai $x = 15$, sehingga berhasil mencapai lapisan *observing* yang ditandai dengan [], digarisbawahi, dan dicetak tebal pada Tabel 7. Kemudian, pernyataan yang hanya digarisbawahi pada Tabel 7 menunjukkan S2A dan S2B mencapai lapisan *structuring* karena memahami alur pembuktian jawaban. Pada jawaban tertulis, S2A dan S2B belum mampu memunculkan pertanyaan atau gagasan baru sehingga belum mencapai lapisan *inventising*. Akan tetapi, setelah Peneliti melakukan *scaffolding* dengan memberikan pertanyaan pemantik, S2A dan S2B dapat mencapai lapisan tersebut yang ditandai dengan [] dan digaris bawah pada Tabel 7.

Kategori S3 Mencapai Lapisan *Inventising* namun Terdapat Lapisan Pemahaman Sebelumnya Belum Tercapai pada Pemecahan Masalah Kontekstual SPLDV.

Terlibatnya lapisan pemahaman matematis Pirie-Kieren pada subjek dalam menghasilkan jawaban tertulis disajikan pada Tabel 8.

Tabel 8. Jawaban Tertulis S3A dan S3B

S3A	S3B
<p>A) Usia Alfian dan Asca adalah 25 tahun, Alfian dan Asca adalah kakak beradik</p> <p>B) Pemodelan : Alfian dan Asca misalkan</p> <p>Alfian = x Asca = y</p> <p>Bentuk SPLDV</p> $\begin{cases} x + y = 25 \\ 6x + 2y = 24 \end{cases}$ <p>Primitive knowing</p> <p>Property noticing</p> <p>Structuring</p>	<p>a) Ya dikalau, misal usia Alfian dan Asca saat ini ber. 25 tahun</p> <p>b) per misal usia alfian dan asca</p> <p>usia alfian =</p> $\begin{cases} x + y = 25 \\ 6x + 2y = 24 \end{cases}$ <p>Image having</p>



Berdasarkan Tabel 8, S3A dan S3B mencapai lapisan *primitive knowing*, *property noticing*, dan *formalizing*. Sementara itu, tiga lapisan lainnya juga terindikasi dicapai S3A dan S3B namun perlu dielaborasi dengan hasil wawancara untuk mengetahui ketercapaian indikator pada Tabel 2. Ditemukannya jawaban benar, tidak menjamin kebenaran pada proses pemecahan masalah. S3A dan S3B terindikasi mencapai lapisan *inventising*, namun berdasarkan tes tertulis, S3A belum mencapai lapisan *image making*, *image having*, dan *observing*. Sedangkan S3B belum mencapai lapisan *image making* dan *observing*. Karena itu, peneliti memberikan *scaffolding* untuk membantu S3A dan S3B mencapai setiap lapisan pemahaman matematis. Tercapainya lapisan pemahaman matematis sebelum dan sesudah dilakukannya *scaffolding* terungkap melalui wawancara pada Tabel 9.

Tabel 9. Hasil Wawancara S3A dan S3B

S3A		S3B	
Peneliti	: Apa arti Alfian = x dan Asca = y ? Usianya atau apa?	Peneliti	: Apa maksud usia Alfian = dan usia Asca =, kamu misalkan dengan variabel apa?
S3A	: [<u>Usianya</u>]	S3B	: [<u>Usia Alfian = x, usia Asca = y</u>]
Peneliti	: Apa maksud $x + y = 25$ dan $5 + x = 2y$?	Peneliti	: Apa maksud $x + y = 25$ dan $5 + x = 2y$?
S3A	: [<u>Usianya Alfian dan Asca sekarang, 5 tahun mendatang $5 + x =$</u>]	S3B	: [<u>Usia Alfian + usia Asca = 25, 5 + usia Alfian dan usia Asca = 2y</u>]
Peneliti	: Kenapa kok $5 + x$?	Peneliti	: $5 +$ usia Alfian? 5 berarti?
S3A	: [<u>5 tahun mendatang usia Alfian 2 kali usia Asca</u>]	S3B	: [<u>Umurnya Alfian</u>]
Peneliti	: Tapi kamu bilang $5 + x$? berarti 5 kali usianya Alfian?	Peneliti	: Yakin? apa maksud dari 5?
S3A	: [<u>Salah</u>]	S3B	: [<u>5 tahun mendatang</u>]
Peneliti	: Pakai cara apa untuk mencari x dan y ?	Peneliti	: Mencari x dan y dengan cara?
S3A	: Substitusi	S3B	: Substitusi
Peneliti	: Mengapa menjadi $x = 25.y$?	Peneliti	: Apa maksud $25.y$? karena kamu mensubstitusikan menjadi $25 - y$, jadi yang benar mana?
S3A	: [<u>Dikali</u>]	S3B	: [<u>$25 - y$</u>]

S3A		S3B	
Peneliti	: Tapi kamu substitusi ke persamaan (2) tertulis $25 - y$?	Peneliti	: Dengan substitusi kamu menghasilkan $y = 10$ dan $y = 15$? Kenapa y memiliki dua nilai? kamu mensubstitusikan $x = 10$, padahal $y = 10$, berarti yang disubstitusi dengan 10 , x atau y ?
S3A	: [Itu dikurangi, tadi typo]	S3B	: [y]
Peneliti	: Melalui substitusi, kamu menghasilkan $y = 10$, sedangkan x ?	Peneliti	: 15 itu x atau y ?
S3A	: [10]	S3B	: x
Peneliti	: 10 juga? kamu tulis $y = 10$ dan $y = 15$, kenapa?	Peneliti	: Kamu membuktikannya dengan mensubstitusi usia keduanya ke persamaan (1)? Tapi kenapa ini $16 + 10$?
S3A	: Salah	S3B	: <u>Iya, itu $15 + 10$ typo</u>
Peneliti	: Kamu substitusikan, $x = 10$, padahal yang bernilai 10 itu y .	Peneliti	: Kira-kira dari proses penyelesaian masalah yang telah kamu lakukan, dapatkah kamu memunculkan pertanyaan atau gagasan baru?
S3A	: Iya	S3B	: [Ada dong, kayaknya ada kemungkinan hasil yang beda kak jika aku ganti soal]
Peneliti	: Harusnya yang disubstitusi dengan 10 itu x atau y ?	Peneliti	: Bagaimana maksudnya?
S3A	: y	S3B	: [Misal aku tetap pakai nama Alfian dan Asca ini, tapi masalahnya tidak seperti itu]
Peneliti	: Kalau $y = 10$, maka $x +$ berapa?	Peneliti	: Mau kamu ganti gimana?
S3A	: $x + 10 = 25$, $x = 15$	S3B	: [Misal itu kayak yang aku tulis, usia Alfian + usia Asca adalah 27 tahun, terus 2 kali usia Asca adalah usia Alfian pada tiga tahun ke depan, nah tadi aku hitung usia Alfian jadi 17 tahun, dan usia Asca jadi 10 tahun]
Peneliti	: Berarti $x = 15$, $y = 10$?	Peneliti	: Jadi gimana?
S3A	: Iya	S3B	: [Ini lo kak, jadi beda hasilnya]
Peneliti	: Untuk mencari kebenaran jawaban, kamu pakai cara substitusi?	Peneliti	: Iya, kira-kira kenapa kok hasilnya jadi beda?
S3A	: <u>Iya</u>	S3B	: [Ya karena sama kayak beda soal, meskipun pakai nama orang yang sama]
Peneliti	: Tapi ini $15 + 10$ atau $16 + 10$?	Peneliti	: Kira-kira dari proses penyelesaian masalah yang telah kamu lakukan, dapatkah kamu memunculkan pertanyaan atau gagasan baru?
S3A	: <u>$15 + 10$, itu typo</u>	S3B	: [Ada dong, kayaknya ada kemungkinan hasil yang beda kak jika aku ganti soal]
Peneliti	: Kira-kira dari proses penyelesaian masalah yang telah kamu lakukan, dapatkah kamu memunculkan pertanyaan atau gagasan baru?	Peneliti	: Bagaimana maksudnya?
S3A	: [Iya kak, sepertinya jika penjumlahan usia Alfian dan Asca saya ubah nanti hasil usia Alfian dan Asca juga berubah]	S3B	: [Misal aku tetap pakai nama Alfian dan Asca ini, tapi masalahnya tidak seperti itu]
Peneliti	: Bisa sebutkan alasannya?	Peneliti	: Mau kamu ganti gimana?
S3A	: [Kan jadi kayak beda soal kak, contoh ketika usia Alfian + usia Asca = 22, lalu usia Alfian pada lima tahun yang akan datang sama dengan usia Asca saat ini, maka saya temukan usia Alfian adalah 13 dan usia Asca adalah 9]	S3B	: [Misal itu kayak yang aku tulis, usia Alfian + usia Asca adalah 27 tahun, terus 2 kali usia Asca adalah usia Alfian pada tiga tahun ke depan, nah tadi aku hitung usia Alfian jadi 17 tahun, dan usia Asca jadi 10 tahun]

Pernyataan yang ditandai [] pada Tabel 9 menunjukkan kesalahan S3A dan S3B dalam pemecahan masalah. Pernyataan yang dicetak tebal dan digarisbawahi menunjukkan S3B mencapai lapisan *image having* karena memahami makna pemodelan matematika yang dibuat. Pernyataan yang hanya digarisbawahi menunjukkan S3A dan S3B mencapai lapisan *structuring* karena dapat membuktikan kebenaran jawabannya. Pernyataan yang dicetak tebal dan [] menunjukkan S3A dan S3B mencapai lapisan pemahaman *inventising* karena dapat memunculkan konsep baru yaitu, jika informasi pada masalah diubah, maka penyelesaian yang ditemukan juga berubah. Subjek S3A mula-mula belum mencapai lapisan *image making*, *image having*, *observing*. Begitu pula dengan subjek S3B juga belum mencapai lapisan *image making* dan *observing*. Akan tetapi, setelah peneliti melakukan *scaffolding*, S3A dan S3B mencapai lapisan *image making* yang ditandai dengan [] dan bergaris bawah. Lebih lanjut, S3A juga mencapai lapisan *image having* setelah pemberian *scaffolding* yang ditandai dengan [], bergaris bawah, dan bercetak tebal. Kemudian, S3A dan S3B berhasil mencapai lapisan *observing* setelah pemberian *scaffolding* yang ditandai dengan cetak tebal.

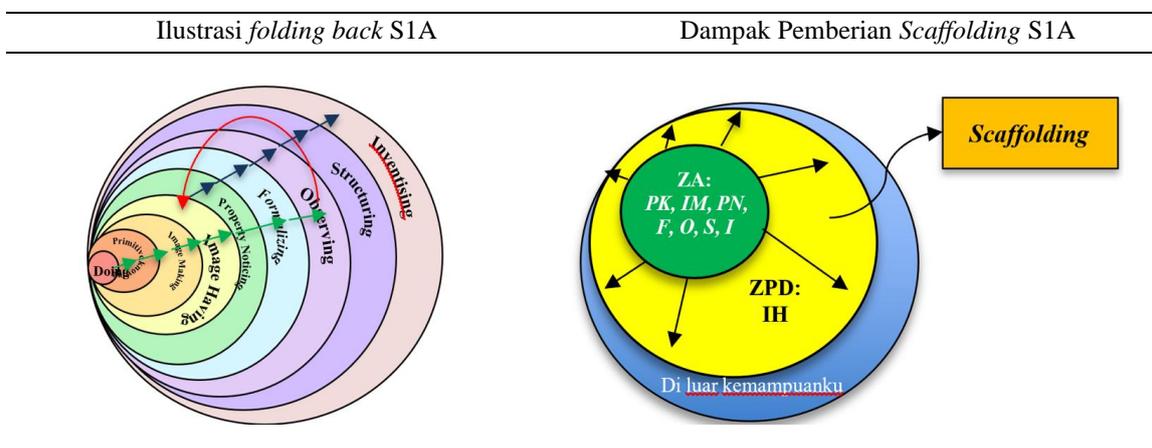
Pembahasan

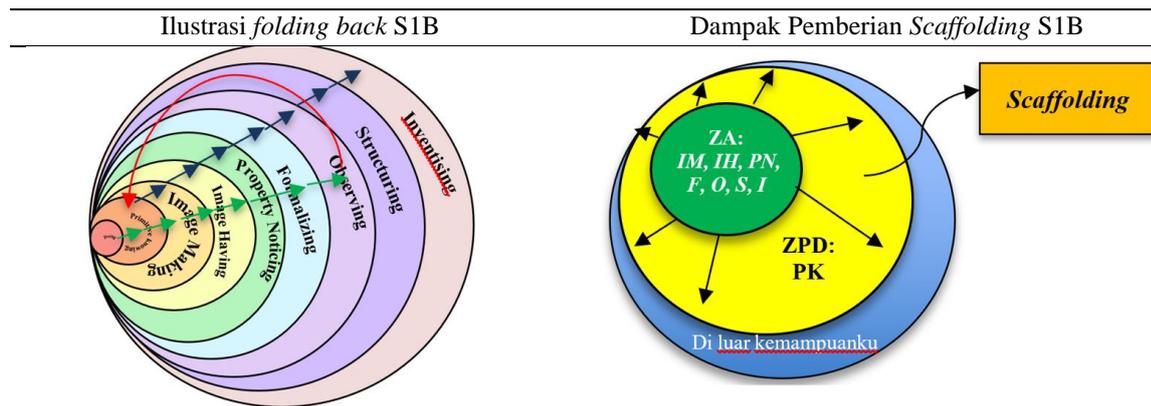
Temuan penelitian ini meliputi, (1) *folding back* subjek dan pemberian *scaffolding* agar lapisan pemahaman matematis Pirie-Kieren subjek tercapai secara sistematis, (2) lapisan pemahaman matematis Pirie-Kieren tertentu yang tidak dicapai subjek, dan (3) pemberian *scaffolding* dapat membantu subjek mencapai setiap lapisan pemahaman matematis Pirie-Kieren.

Folding Back Subjek dan Pemberian Scaffolding agar Lapisan Pemahaman Matematis Pirie-Kieren Subjek Tercapai Secara Sistematis

Terjadinya *folding back* dilatarbelakangi oleh pengetahuan subjek tidak cukup untuk memecahkan masalah baru, sehingga subjek perlu menggali pengetahuannya dan menghubungkannya secara konseptual untuk memecahkan masalah (Martin & Towers, 2016; Putri & Hidayanto, 2023). *Folding back* S1A dan S1B dan dampak pemberian *scaffolding* diilustrasikan pada Tabel 10.

Tabel 10. *Folding Back* S1A dan S1B dan Dampak Pemberian *Scaffolding*





Tabel 11. Keterangan Simbol pada Tabel 10

Simbol	Keterangan
	Lapisan pemahaman matematis yang dicapai subjek sebelum terjadinya <i>folding back</i>
	Lapisan pemahaman matematis yang dicapai subjek setelah terjadinya <i>folding back</i> atau setelah diberikan <i>scaffolding</i>
	Terjadinya <i>folding back</i> dari lapisan pemahaman matematis bagian luar ke bagian dalam
PK	<i>Primitive knowing</i>
IM	<i>Image making</i>
IH	<i>Image having</i>
PN	<i>Property noticing</i>
F	<i>Formalizing</i>
O	<i>Observing</i>
S	<i>Structuring</i>
I	<i>Inventising</i>

Lapisan pemahaman S1A dan S1B tumbuh dari *primitive knowing* hingga *inventising*, meskipun S1A mengalami *folding back* pada lapisan sebelumnya dari *observing* → *image making* dan S2B dari *observing* → *primitive knowing*. Hal ini relevan dengan penelitian terdahulu bahwa, pemahaman subjek tumbuh dari lapisan *primitive knowing* hingga *inventising* meskipun mengalami *folding back* pada lapisan *observing* (Suiswo et al., 2023). Hal tersebut karena, subjek yang mengalami *folding back* belum tentu mengalami penurunan pemahaman, melainkan perlu mengingat dan menerapkan pengetahuannya untuk digunakan dalam perspektif baru (Suiswo et al., 2023).

Lapisan Pemahaman Matematis Teori Pirie-Kieren Tertentu yang Tidak Dicapai Subjek

Subjek tidak mencapai lapisan pemahaman matematis tertentu karena kurang mampu mengeksplorasi pemahaman matematika yang dimilikinya selama pembelajaran (Gokalp & Bulut, 2018). Sebelum peneliti melakukan *scaffolding* kepada subjek, terdapat empat subjek yang tidak mencapai lapisan pemahaman matematis tertentu yang disajikan pada Tabel 12.

Tabel 12. Lapisan Pemahaman Matematis yang Tidak dicapai Subjek dan Alasannya

Subjek	Lapisan Pemahaman Matematis yang Tidak dicapai Subjek	Alasan Tidak Tercapainya Lapisan Pemahaman Matematis Subjek
S2A	<i>Inventising</i>	Subjek tidak dapat memunculkan pertanyaan atau gagasan baru.
S2B	<i>Observing</i>	Subjek melakukan kesalahan dengan menuliskan variabel y sebanyak dua nilai.

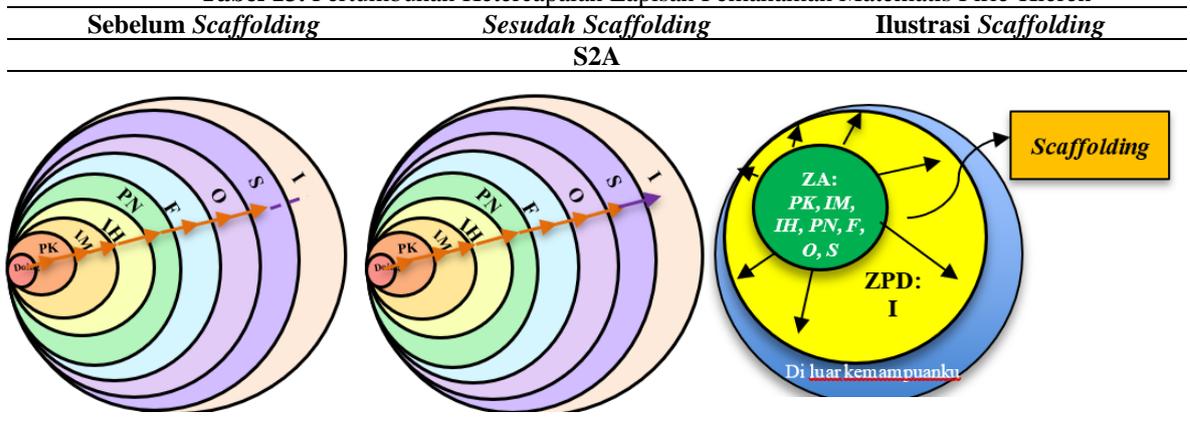
Subjek	Lapisan Pemahaman Matematis yang Tidak dicapai Subjek	Alasan Tidak Tercapainya Lapisan Pemahaman Matematis Subjek
	<i>Inventising</i>	Subjek tidak dapat memunculkan pertanyaan atau gagasan baru.
S3A	<i>Image making</i>	Subjek menuliskan informasi terkait masalah dengan tidak tepat
	<i>Image having</i>	Subjek melakukan kesalahan dalam membuat permisalan variabel pada masalah
	<i>Observing</i>	Subjek melakukan kesalahan dengan menuliskan variabel y sebanyak dua nilai.
S3B	<i>Image making</i>	Subjek menuliskan informasi terkait masalah dengan tidak tepat.
	<i>Observing</i>	Subjek melakukan kesalahan dengan menuliskan variabel y sebanyak dua nilai.

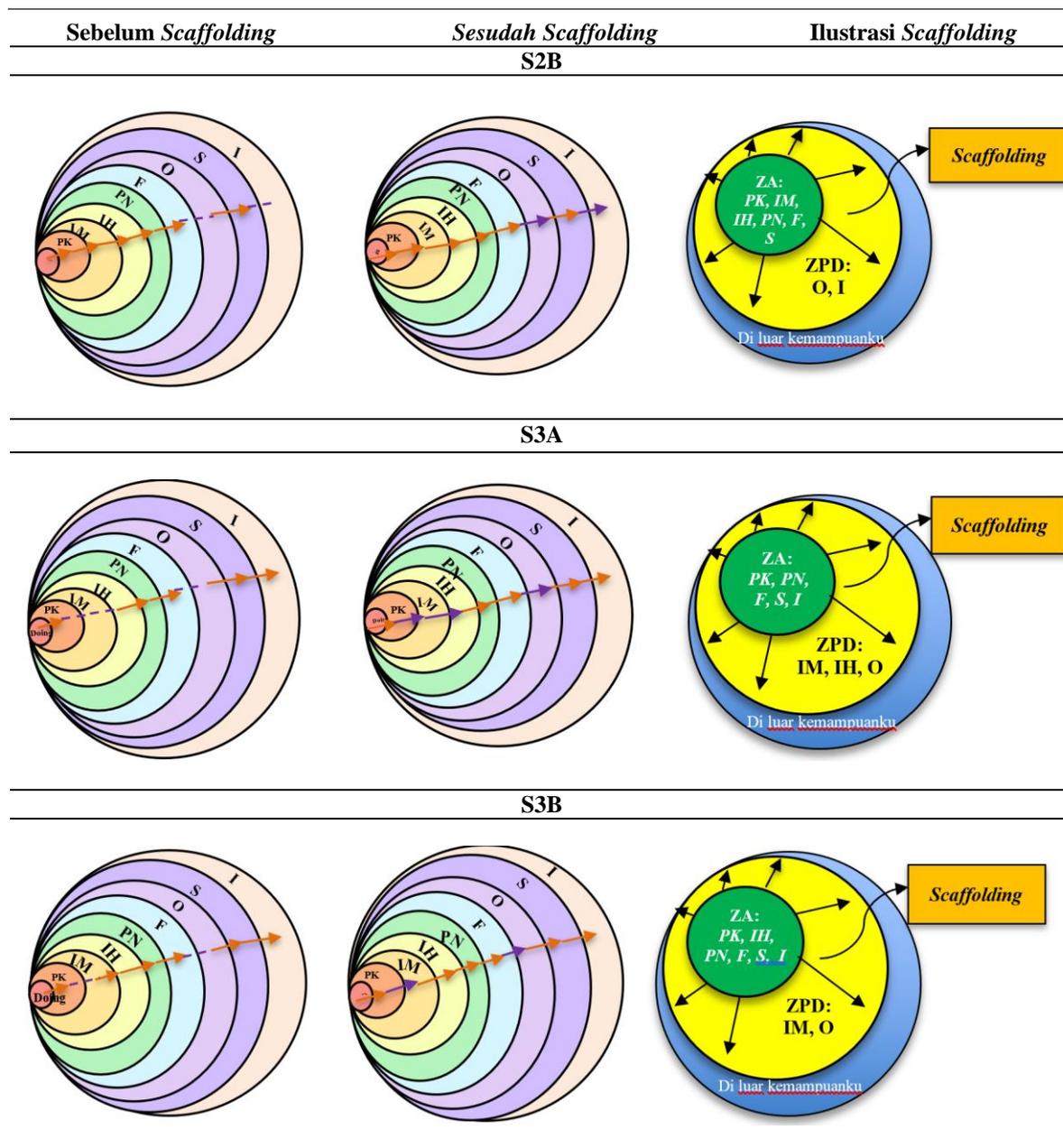
Berdasarkan Tabel 12, lapisan *inventising* tidak dicapai S2A dan S2B karena menumbuhkan konsep baru yang salah. Kemudian, lapisan *observing* tidak dicapai S2B, S3A, dan S3B karena salah dalam menghubungkan aktivitas pada lapisan *formalizing*. Lalu, lapisan *image having* tidak dicapai S3A karena gambaran permasalahan tidak dibuat subjek. Lebih lanjut, lapisan *image making* tidak dicapai S3A dan S3B karena tidak dapat mengonstruksi pemahaman sebelumnya untuk diaplikasikan pada masalah baru. Hal ini relevan dengan penelitian yang dilakukan oleh Gokalp & Bulut (2018), dimana subjek tidak mencapai lapisan pemahaman matematis tertentu karena tidak dapat mengonstruksi pengetahuannya untuk diaplikasikan dalam pemecahan masalah.

Pemberian *Scaffolding* dapat Membantu Subjek Mencapai Setiap Lapisan Pemahaman Matematis Pirie-Kieren

Subjek dapat memperbaiki kesalahan berpikirnya dengan mengingat dan mengembangkan pengetahuannya untuk memecahkan masalah melalui *scaffolding* (Humairoh & Hadi, 2023; Ridwan, 2024). *Scaffolding* dari peneliti kepada subjek S2A, S2B, S3A, dan S3B menunjukkan pertumbuhan lapisan pemahaman matematis Pirie-Kieren pada Tabel 13.

Tabel 13. Pertumbuhan Ketercapaian Lapisan Pemahaman Matematis Pirie-Kieren





Tabel 14. Keterangan Simbol pada Tabel 13

Simbol	Keterangan
	Lapisan pemahaman matematis yang dicapai subjek sebelum pemberian <i>scaffolding</i>
	Lapisan pemahaman matematis yang dicapai subjek setelah pemberian <i>scaffolding</i>
	Lapisan pemahaman matematis yang tidak dicapai subjek sebelum <i>scaffolding</i>

Sebelum dilakukannya *scaffolding* oleh peneliti, lapisan pemahaman matematis S2A dan S2B belum mencapai lapisan *inventising*. Akan tetapi, setelah pemberian *scaffolding*, S2A dan S2B dapat mencapai setiap lapisan pemahaman matematis Pirie-Kieren. Lebih lanjut, sebelum peneliti melakukan *scaffolding* terhadap S3A dan S3B, lapisan pemahaman *inventising* telah tercapai. Akan tetapi, berdasarkan jawaban tertulis, S3A dan S3B belum mencapai beberapa lapisan pemahaman yang lebih dalam. Hal ini mengartikan bahwa, subjek yang mampu mencapai lapisan *inventising* belum tentu mencapai semua lapisan pemahaman matematis. Setelah Peneliti melakukan *scaffolding*,

S3A dan S3B berhasil mencapai setiap lapisan matematis Pirie-Kieren sehingga dapat memecahkan masalah dengan sistematis.

Peristiwa pada S2A dan S2B berbeda dengan penelitian Safitri et al. (2018) & Sagala (2015) bahwa, para ahli hanya memaparkan pola pemahaman matematis pada lapisan tertentu tanpa memberikan *scaffolding*, sehingga lapisan pemahaman subjek statis dan tidak mencapai lapisan *inventising*. Sementara itu, peristiwa pada S3A dan S3B relevan dengan penelitian terdahulu bahwa, pola pertumbuhan lapisan pemahaman matematis subjek tumbuh dari *primitive knowing* → *structuring* → *inventising* tanpa mencapai lima lapisan pemahaman lainnya (Jannah et al., 2023). Akan tetapi, juga terdapat perbedaan dengan penelitian sebelumnya karena Peneliti melakukan *scaffolding* untuk membantu subjek mencapai setiap lapisan pemahaman matematis Pirie-Kieren.

SIMPULAN

Temuan penelitian ini adalah didapatkan bahwa, indikasi S1A dan S1B yang mencapai seluruh lapisan pemahaman matematis Pirie-Kieren berdasarkan jawaban tertulis salah. Hal itu karena, setelah dilakukannya elaborasi dengan hasil wawancara ditemukan bahwa, (1) S1A belum mencapai lapisan *image having* dan mengalami *folding back* dari lapisan *observing* ke *image having*, dan (2) S1B belum mencapai lapisan *primitive knowing* dan mengalami *folding back* dari lapisan *observing* ke lapisan *primitive knowing*. Akan tetapi, setelah pemberian *scaffolding* S1A dan S1B dapat mencapai setiap lapisan pemahaman matematis tersebut. Yakni, (1) S1A mencapai lapisan *image having* pada ZPD, dan (2) S1B mencapai lapisan *primitive knowing* pada ZPD. Sementara itu, S2A, S2B, S3A, dan S3B juga dapat mencapai seluruh lapisan pemahaman matematis Pirie-Kieren setelah Peneliti melakukan *scaffolding*. Yakni, (1) S2A mencapai lapisan *inventising* pada ZPD, (2) S2B mencapai lapisan *observing* dan lapisan *inventising* pada ZPD, (3) S3A mencapai lapisan *image making*, *image having*, dan *observing* pada ZPD, dan (4) S3B mencapai lapisan *image making* dan *observing* pada ZPD.

Penelitian ini juga menemukan bahwa, *scaffolding* yang berhasil meningkatkan lapisan pemahaman matematis subjek terdiri dari tiga cara. Pertama, Peneliti memberikan pertanyaan pemantik untuk memantik pengetahuan subjek. Kedua, Peneliti memberikan contoh pemecahan masalah sebagai referensi pemecahan masalah baru bagi subjek. Ketiga, Peneliti memberikan umpan balik konstruktif terhadap jawaban subjek untuk meningkatkan pengetahuan subjek. Peneliti menyimpulkan bahwa, lapisan pemahaman matematis siswa dalam memecahkan masalah kontekstual SPLDV dapat dicapai secara menyeluruh berdasarkan teori Pirie-Kieren dengan indikator yang telah ditetapkan. Pemahaman terhadap lapisan pemahaman matematis Pirie-Kieren siswa dapat digunakan guru sebagai bahan pertimbangan untuk melakukan perbaikan pembelajaran. Saran untuk penelitian selanjutnya, para peneliti diharapkan menggunakan *scaffolding* elektronik atau *e-scaffolding* untuk membantu siswa mencapai seluruh lapisan pemahaman matematis Pirie-

Kieren. Yakni, *e-scaffolding* tersebut berupa konten pembelajaran yang diunggah melalui *platform* media social, sehingga siswa dapat mengaksesnya secara fleksibel.

DAFTAR RUJUKAN

- Ananda, E. D. (2021). Kemampuan komunikasi matematis siswa SMP ditinjau berdasarkan *self esteem* pada materi sistem persamaan linear dua variabel. *MATHEdunesa*, 10(1), 45–58.
<https://doi.org/10.26740/mathedunesa.v10n1.p45-58>
- Asih, A., Rohman, N., & Utami, A. D. (2020). Profil lapisan pemahaman konsep barisan dan deret berdasar teori *pire* kieren pada siswa kelas VIII SMP Muhammadiyah 2 Bojonegoro. *Jurnal Inovasi Pembelajaran Matematika (JIPM)*, 2(1), 12–34.
<https://doi.org/10.36379/jipm.v2i1.125>
- Ayuningtyas, I. N., Amir, M. F., & Wardana, M. D. K. (2024). Elementary school students' layers of understanding in solving literacy problems based on Sidoarjo context. *Infinity Journal*, 13(1), 157–174.
- Candrama, M. M. T., Darmawan, P., & Basri, H. (2023). High School student's thinking in solving curved sides space numeracy problem on AKM based on dual-process theory. *Jurnal Riset Pendidikan dan Inovasi Pembelajaran Matematika*, 7(1), 1-25.
<https://doi.org/10.26740/jrpipm.v7n1.p1-25>
- Darmawan, P & Yusuf, F, I. (2022). *Teori kognitivisme dan penerapannya dalam penelitian pendidikan matematika*. Insan Cendekia Nusantara: Tulungagung.
- Darmawan, P. (2019). Aplikasi dual-process theory: Karakteristik proses mental siswa dalam memecahkan masalah segi banyak. *Prosiding: Konferensi Nasional Matematika dan IPA Universitas PGRI Banyuwangi*, 1(1), 204–214.
<https://ejournal.unibabwi.ac.id/index.php/knmipa/article/view/813>
- Gokalp, N. D., & Bulut, S. (2018). A New form of understanding maps: Multiple representations with *pire* and kieren model of understanding. *International Journal of Innovation in Science and Mathematics Education*, 26(6).
<https://openjournals.library.sydney.edu.au/CAL/article/view/12454>
- Humairoh, O., & Hadi, M. S. (2023). Penggunaan Defragmenting struktur berpikir pada peserta didik yang mengalami berpikir pseudo. *Community Development Journal: Jurnal Pengabdian Masyarakat*, 4(2), 1669–1676. <https://doi.org/10.31004/cdj.v4i2.13150>
- Irvine, J. (2023). The *pire* kieren dynamic model of the growth of mathematical understanding: The critical concept of folding back. *Journal of Instructional Pedagogies*, 29.
<https://eric.ed.gov/?id=EJ1408556>
- Jannah, F. L., Aminah, N., Pramuditya, S. A., Rosita, C. D., & Noto, M. S. (2023). Analysis of learning obstacles for junior high school students in understanding SPLDV concepts. *Journal Focus Action of Research Mathematic (Factor M)*, 6(2), 143–162.
https://doi.org/10.30762/f_m.v6i2.1862
- Jannah, U. R., Hafsi, A. R., & Nurhidayati, S. (2023). Conceptual understanding of students with special needs in two-dimensional shapes based on *pire* kieren's theory. *Jurnal Tadris Matematika*, 6(2), 219–230. <https://doi.org/10.21274/jtm.2023.6.2.219-230>
- Kumesan, S., Mandolang, E., Supit, P. H., Monoarfa, J. F., & Mangelep, N. O. (2023). Students' mathematical problem-solving process in solving story problems on SPLDV material. *Jurnal Review Pendidikan Dan Pengajaran (JRPP)*, 6(3), 681–689.
<https://doi.org/10.31004/jrpp.v6i3.19309>
- Kus, M. (2018). Numeracy. *Brock Education Journal*, 27(2).
- Kusmaryono, I., Gufron, A. M., & Rusdiantoro, A. (2020). Effectiveness of scaffolding strategies

- in learning against decrease in mathematics anxiety level. *Numerical: Jurnal Matematika dan Pendidikan Matematika*, 4, 13–22. <https://doi.org/10.25217/numerical.v4i1.770>
- Martin, L. C., & Towers, J. (2016). Folding back, thickening and mathematical met-befores. *The Journal of Mathematical Behavior*, 43, 89–97. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2016.07.002>
- Miles, M. B., & Huberman, A. M. (1994). *Qualitative data analysis: an expanded sourcebook*. Sage.
- Musakirawati, M., Jemmy, J., Anggriawan, F., Triansyah, F. A., Akib, A., & Tahir, A. (2023). Pemanfaatan platform Rapor Pendidikan Indonesia terhadap perencanaan berbasis data. *JDMP (Jurnal Dinamika Manajemen Pendidikan)*, 7(2), 201–208. <https://doi.org/10.26740/jdmp.v7n2.p201-208>
- Nayazik, A. (2022). Analysis of students' mathematics numeration literacy in SPLDV problems viewed from visual and auditorial learning styles. *Journal of Medives: Journal of Mathematics Education IKIP Veteran Semarang*, 6(2), 158–163. <https://doi.org/10.31331/medivesveteran.v6i2.1731>
- Nurdiansari, N., & Utomo, A. P. (2023). Pemanfaatan rapor pendidikan untuk penyusunan program peningkatan literasi di SDN 001 Teluk Alulu Kecamatan Maratua Kabupaten Berau pada tahun 2023. *Jurnal Ilmu Manajemen dan Pendidikan*, 3, 97–104. <https://doi.org/10.30872/jimpian.v3iSE.2925>
- Pirie, S., & Kieren, T. (1989). A recursive theory of mathematical understanding. *For the Learning of Mathematics*, 9(3), 7–11. <https://www.jstor.org/stable/40248156>
- Pusmendik. (2022). *Komponen, level, domain, subdomain, kompetensi dan contoh soal*. Pusmendik. https://pusmendik.kemdikbud.go.id/an/asesmen_kompetensi_minimum/view/literasi-matematika
- Putri, O. R. U., & Hidayanto, E. (2023). Problem-solving: Growth of students' mathematical understanding in producing original solutions. *Mathematics Teaching Research Journal*, 15(3), 168–189. <https://eric.ed.gov/?id=EJ1408190>
- Rahayuningsih, S., & Sa'dijah, C. (2018). Layers of conceptual understanding of fractions among elementary student. *I-Manager's Journal on Educational Psychology*, 12(3), 13.
- Ridwan C, R. D. M. (2024). Kegagalan metakognitif siswa dalam pemecahan masalah matematis dan pemberian scaffolding dengan menggunakan model problem based learning. pendidikan matematika. <https://repository.unja.ac.id/59848/>
- Sa'adah, M., Suiswo, S., & Parta, I. N. (2020). Profil *folding back* siswa dalam menyelesaikan soal cerita. *Jurnal Kajian Dan Pembelajaran Matematika*, 4(2), 24–31.
- Safitri, R. I., Mulyani, S., & Ratu, N. (2018). Profil lapisan pemahaman konsep siswa SMP terkait garis tinggi segitiga. *Jurnal Ilmiah Soulmath: Jurnal Edukasi Pendidikan Matematika*, 6(2), 65–78. <https://doi.org/10.25139/smj.v6i2.1141>
- Sagala, V. (2015). Profil lapisan pemahaman mahasiswa calon guru. *Jurnal Ilmiah Soulmath: Jurnal Edukasi Pendidikan Matematika*, 3(4), 170–216. <https://doi.org/10.25139/sm.v3i4.1034>
- Suidayati, S., Nur Afifah, D. S., & Sukwatus Suja'i, I. (2019). Teori Pirie-Kieren: lapisan pemahaman siswa SMP berkemampuan matematika tinggi dalam menyelesaikan soal bangun ruang. *MaPan*, 7(2), 211–228. <https://doi.org/10.24252/mapan.2019v7n2a4>
- Suiswo. (2014). *Folding back mahasiswa dalam menyelesaikan masalah limit berdasarkan pengetahuan*. https://mulok.lib.um.ac.id/index.php?p=show_detail&id=67680
- Suiswo, Darmawan, P., Murtafiah, W., & Osman, S. (2024). Exploring default-interventionist interaction of thinking activity types on probability problem-solving. *Journal on*

Mathematics Education, 15(1), 295–316. <https://doi.org/10.22342/jme.v15i1.pp295-316>

Susiswo, S., Parameswari, P., Putri, O. R. U., Lanya, H., Utami, A. D., & Murniasih, T. R. (2023). The growth of students' function limit concepts understanding in solving controversial problems based on pirie kieren's theory. *JTAM (Jurnal Teori dan Aplikasi Matematika)*, 7(4), 1204–1220. <https://doi.org/10.31764/jtam.v7i4.16835>

Wulandari, L. P., & Setianingsih, R. (2018). The giving of scaffolding to overcome junior high school students' difficulties in solving higher order thinking problems of algebra. *MATHEdunesa*, 1(7), 46–50. Retrieved from: <https://jurnalmahasiswa.unesa.ac.id/index.php/mathedunesa/article/view/25554/23429>