



Analisis Kesulitan Mahasiswa Pendidikan Matematika dalam Menyelesaikan Masalah Pembuktian Pernyataan Matematika

Vivi Suwanti¹, Trija Fayeldi²

^{1,2}*Jurusan Pendidikan Matematika, Universitas Kanjuruhan Malang. Jl. S. Supriadi 48 Malang
e-mail: vivi_devbatghost@unikama.ac.id¹, trija_fayeldi@unikama.ac.id²*

ABSTRAK

Penelitian ini bertujuan untuk mendeskripsikan kesulitan mahasiswa pendidikan matematika dalam melakukan pembuktian kalimat matematika. Penelitian ini dilakukan dengan metode kualitatif deskriptif. Subjek penelitian ini adalah 3 mahasiswa pendidikan matematika yang tengah menempuh mata kuliah Analisis real. Subjek penelitian dipilih berdasarkan kemampuan pembuktian pernyataan matematis dalam mata kuliah analisis real. Penelitian dilakukan dengan pemberian tes tertulis dan lisan terhadap subjek penelitian. Berdasarkan hasil penelitian diketahui bahwa: mahasiswa berkemampuan tinggi cenderung memiliki kesulitan dalam memaparkan secara tertulis informasi dari sifat yang digunakan dalam tahap pembuktian meskipun mereka tetap dapat menyelesaikan konstruksi bukti dengan benar; mahasiswa berkemampuan sedang cenderung memiliki kesulitan dalam menyusun logika-logika pembuktian serta langkah-langkahnya yang tepat; dan mahasiswa berkemampuan rendah cenderung memiliki kesulitan dalam memahami maksud, isi, ataupun sifat yang diberikan oleh soal. Untuk memperdalam hasil penelitian mengenai kesulitan mahasiswa pada pembuktian, maka pada penelitian selanjutnya dapat digunakan metode deteksi kesulitan seperti NEA (*Newman's Error Analysis*) untuk melihat hasil dengan lebih terstruktur.

Kata Kunci: kesulitan, pembuktian, matematika

ABSTRACT

This study's aim is to describe mathematics education college students difficulties when doing mathematical proof. This study employs descriptive qualitative methods. This study subjects are 3 mathematic education college students who take real analysis class. The subjects was chosen according to their mathematics proposition proof ability in real analysis. The study was carried out by two step tests, they are written and oral test. Based on the study results we know that: college student with high ability tends to have difficulty in write the information that used to proof in written form, but they still manage to get the right proof; college student with middle ability tends to have difficulty in construct the suitable steps and logics to proof the proposition; and college student with low ability tends to have difficulty in understanding the purpose, meaning, and properties that given by the known proposition in the task. In order to deepen this study results, in the next study, we can employs a standard method to detects difficulty, such as NEA (Newton's Error Analysis), to find more structured results.

Keywords: difficulty, proof, mathematics

PENDAHULUAN

Matematika merupakan salah satu ilmu yang tidak terpisahkan dari logika pembuktian. Mulai dari teorema, lemma, hingga akibat yang berupa proposisi atau pernyataan matematis harus dibuktikan terlebih dahulu sebelum dapat digunakan (Suwanti, 2016). Rumus-rumus serta algoritma-algoritma pemecahan masalah yang seringkali diajarkan dalam proses pembelajaran matematika sekolah merupakan perwujudan dari proposisi-proposisi yang telah dibuktikan terlebih dahulu oleh matematikawan. Salah satu matematikawan yang seringkali ditemui dalam pembelajaran sekolah adalah guru matematika. Oleh karena itu, mahasiswa pendidikan matematika sebagai calon guru matematika perlu diberikan bekal berupa kemampuan untuk menguasai konsep matematika serta mampu memformulasikan penyelesaian masalah prosedural pembuktian pernyataan matematika sesuai dengan kurikulum berbasis KKNI (Kerangka Kualifikasi Nasional Indonesia) yang saat ini tengah diterapkan pada perguruan tinggi (Murtafiah, Suprpto, & Sanusi, 2017).

Pembuktian pernyataan matematika tidak dapat dipisahkan dari proses perkuliahan mahasiswa pendidikan matematika. Pembuktian pernyataan matematis (proposisi) merupakan salah satu kegiatan pembelajaran yang hampir selalu kita temui dalam berbagai mata kuliah matematika. Untuk bisa melakukan pembuktian pernyataan-pernyataan matematika, mahasiswa perlu memahami dan mampu mengaplikasikan berbagai metode pembuktian sesuai dengan logika penalaran pembuktian. Sesuai dengan Rosita (2014) yang menyatakan bahwa kemampuan bernalar matematis merupakan suatu kebiasaan yang seharusnya menjadi bagian konsisten dalam pengalaman belajar di mana pengalaman awal sangat berperan dalam pembelajaran kebiasaan bernalar matematis.

Akan tetapi, dalam praktik perkuliahan matematika yang telah berlangsung selama ini, mahasiswa pendidikan matematika seringkali mengalami kesulitan dalam mempelajari dan menerapkan logika pembuktian pada permasalahan yang diberikan dalam perkuliahan. Berdasarkan observasi yang dilakukan oleh peneliti saat melaksanakan perkuliahan teori bilangan pada tahun ajaran 2016/2017 di program studi pendidikan matematika Universitas Kanjuruhan Malang, diketahui bahwa nilai rata-rata tes soal pembuktian teori bilangan mahasiswa adalah 57,17. Sebanyak 47% dari 28 subjek observasi mendapat nilai kurang dari 55 atau dengan kata lain di bawah standar rata-rata minimum kelulusan mata kuliah. Jika kemampuan calon guru dalam logika pembuktian rendah, maka dikawatirkan calon guru akan mengalami kesulitan di masa depan saat bertugas dalam mengajar matematika sekolah yang saat ini telah mengacu pada kurikulum 2013 (K-13) di mana siswa dituntut untuk memiliki kemampuan menalar dan menyelesaikan masalah tak rutin matematika. Guru yang matematika yang mengetahui metode-metode pembuktian, belum tentu mampu menerapkan dalam berbagai kasus dan mengajarkannya pada siswa (Hodiyanto & Susiaty, 2018). Selain memahami metode pembuktian matematika dengan penalaran yang sesuai, guru juga harus memiliki kemampuan untuk mentransfer/mengajarkan metode tersebut dengan

disesuaikan pada kemampuan nalar siswa. Oleh karena itu, untuk mengasah kemampuan menalar dan logika guru matematika, maka kemampuan menalar dan logika pembuktian mahasiswa pendidikan matematika perlu diperhatikan.

Menurut Rosita (2014), penalaran dapat diartikan sebagai suatu aktivitas/proses berpikir di mana kesimpulan ditarik atau pernyataan baru dibuat berdasarkan pada pernyataan lama yang telah dibuktikan atau diasumsikan kebenarannya. Sesuai dengan tiga model pemecahan masalah Polya, penalaran dapat dikategorikan dalam lima kategori, yaitu 1) *sense-making*, 2) *conjecturing*, 3) *convincing*, 4) *reflecting*, dan 5) *generalising*. Menurut Bjuland dalam Rosita (2014), *Sense-making* merupakan proses di mana mahasiswa membangun skema dari permasalahan yang dihadapi dan merepresentasikannya sesuai dengan pengetahuan awal yang mereka miliki. Pada tahap ini, mahasiswa akan memahami situasi matematik yang dihadapi dan mengkomunikasikannya dalam model atau simbol matematik. Pengetahuan dan pengalaman awal yang dimiliki mahasiswa sangat berperan penting dalam pelaksanaan tahap ini. *Conjecturing* merupakan kegiatan memprediksi suatu simpulan yang dilakukan berdasarkan pada fakta yang belum lengkap. Dari kegiatan *conjecturing* ini dihasilkan strategi penyelesaian. *Convincing* merupakan kegiatan menjalankan atau mengaplikasikan strategi penyelesaian yang didapat dari hasil *sense making* dan *conjecturing*. *Reflecting* merupakan kegiatan reevaluasi dari kegiatan *sense making*, *conjecturing*, dan *convincing* untuk melihat keterkaitannya dengan teori-teori yang relevan. Dari keseluruhan kegiatan-kegiatan tersebut dilakukan identifikasi dan generalisasi menjadi suatu kesimpulan akhir yang disebut dengan *generalising*.

Menurut Sumarmo (2010), penalaran dapat dibagi dalam dua jenis yaitu, induktif dan deduktif. Pada proses pembuktian proposisi matematika, penalaran yang lazim digunakan adalah penalaran deduktif. Baroody dalam Rosita (2014) mendefinisikan bahwa, penalaran deduktif diawali dengan penerapan sifat-sifat premis umum kepada premis khusus yang masih tercakup didalamnya. Dengan kata lain, apa yang berlaku pada premis umum, maka hal tersebut mutlak terjadi pada premis khusus yang merupakan bagian dari cakupan wilayah premis umum. Oleh karena itu nilai kebenaran pada penyimpulan dengan penalaran deduktif hanya memiliki satu nilai kebenaran saja. Salah satu indikator penalaran yang harus dicapai siswa berdasarkan Peraturan Dirjen Dikdasmen No.506/C/PP/2004 adalah kemampuan mengkonstruksi suatu bukti, memilih alasan/bukti terhadap kebenaran solusi (Utami, Mukhni, & Jazwinarti, 2014). Pembuktian proposisi matematika dilakukan melalui sebuah proses komunikasi tulis dengan menggunakan bahasa matematika, yaitu melalui simbol dan notasi matematika (Sundstrom, 2014). Adapun untuk menunjukkan bahwa suatu pernyataan itu salah, maka cukuplah dicari contoh penyangkalnya. Pernyataan yang telah dibuktikan benar selanjutnya disebut sebagai teorema/lemma, sedangkan pernyataan yang diduga benar tetapi belum dapat dibuktikan disebut konjektur. Beberapa metode yang dapat digunakan antara lain pembuktian langsung dan kontradiksi.

Banyaknya metode pembuktian dan alur logika yang selalu dinamis berubah sesuai proposisi yang akan dibuktikan menyebabkan timbulnya kesulitan bagi mahasiswa pendidikan matematika untuk fasih dalam melakukan pembuktian. Dalam penelitiannya, Awi (2017) menyatakan bahwa kesalahan mahasiswa dalam membuktikan disebabkan oleh mahasiswa 1) tidak paham konsep atau materi, 2) tidak paham proposisi, 3) tidak tahu apa yang akan dibuktikan, 4) tidak tahu metode pembuktian yang harus digunakan, dan 5) salah dalam membuktikan. Putri (2015) dalam penelitiannya juga menyatakan bahwa, problematika yang dialami mahasiswa dalam membuktikan pernyataan matematika adalah mahasiswa bingung harus dalam menentukan metode pembuktian yang sesuai (bukti langsung, tak langsung, atau induksi matematika) serta seringnya mahasiswa melupakan penulisan kesimpulan pembuktian di akhir langkah.

Berdasarkan uraian mengenai kesulitan dan pentingnya logika pembuktian yang telah dipaparkan, maka penelitian ini bertujuan untuk mendeskripsikan kesulitan mahasiswa pendidikan matematika dalam melakukan pembuktian kalimat matematika.

METODE

Sesuai dengan tujuan dari penelitian yang telah dipaparkan, maka metode yang digunakan adalah kualitatif deskriptif. Subjek penelitian adalah 3 mahasiswa program studi pendidikan matematika Universitas Kanjuruhan Malang yang tengah menempuh mata kuliah analisis real. Pemilihan subjek penelitian pada mata kuliah analisis real dilakukan dengan pertimbangan bahwa mahasiswa telah akrab dan sering menggunakan logika pembuktian pada perkuliahan. Peneliti memberikan soal pembuktian sederhana yang berisi 1 soal kepada seluruh mahasiswa peserta mata kuliah analisis real kelas 2016A. Berdasarkan hasil pekerjaannya, mahasiswa dibagi dalam tiga tingkat kemampuan pembuktian yaitu tinggi, sedang, dan rendah. Dari setiap tingkat kemampuan diambil masing-masing satu mahasiswa sebagai subjek penelitian sebagai berikut, 1) subjek berkemampuan tinggi (MBU), 2) subjek berkemampuan sedang (RMS), dan 3) subjek berkemampuan rendah (WF).

Penelitian ini dilakukan dengan dua tahap utama yang dilakukan secara berulang di mana setiap tahap terdiri dari tes tertulis dan tes lisan. Pengulangan tahap penelitian sebanyak dua kali dimaksudkan agar bisa didapatkan hasil analisis kesulitan mahasiswa yang lebih mendalam dan terperinci. Pada setiap tahap, tes tertulis dilakukan dengan cara pemberian 1 soal pembuktian. Setelah tes tertulis selesai dilakukan, pada setiap subjek akan dilakukan tes lisan secara terpisah mengenai jawaban pembuktian yang telah dituliskan pada tes tulis. Setelah tahap 1 selesai, maka dilanjutkan dengan tahap kedua yang juga berupa tes tertulis dan lisan. Berikut ini soal tes tulis tahap 1 dan tahap 2.

Tabel 1. Soal tes tertulis

TAHAP KE-	SOAL
1	Buktikan bahwa $\frac{1}{-a} = -\frac{1}{a}, \forall a \in R$
2	Buktikan bahwa jika $a \times a = a$ maka $a = 0$ atau $a = 1, \forall a \in R$

HASIL DAN PEMBAHASAN

Hasil penelitian ini akan dibahas dan dianalisis dari tiap tahap dan dipaparkan berdasarkan hasil tiap subjek. Pada tahap 1, ketiga subjek diberikan waktu mengerjakan tes tertulis selama 30 menit. Pada tes tertulis tahap 1, lama waktu yang dibutuhkan subjek untuk mengerjakan tes bervariasi. Oleh karena itu, pelaksanaan tes lisan tidak dilakukan di saat yang sama untuk tiap subjek. Perubahan langkah pengumpulan data ini juga dilakukan pada tahap 2 dari penelitian. Kesulitan subjek akan dilihat berdasarkan tahap umum pengerjaan soal matematika yaitu tahap diketahui, ditanya, dan dijawab. Berikut ini paparan hasil analisis data berdasarkan kemampuan tiap subjek.

Subjek Berkemampuan tinggi (MBU)

1. Ambil $a \in R$ so korong.

Aksi $\frac{1}{(-a)} = -\frac{1}{a}$

Bukti:

\forall karena $a \in R$ maka $\exists q \in R a \neq 0 \rightarrow a \cdot \frac{1}{a} = 1 = q \cdot a$

\forall karena $a \in R$ maka $\exists -a \in R$

$\frac{1}{(-a)} = \frac{1}{(-a)} \cdot 1$

$= \frac{1}{(-a)} \cdot a \cdot \frac{1}{a}$

$= \frac{1}{(-a)} \cdot (-(-a)) \cdot \frac{1}{a}$

$= \frac{1}{(-a)} \cdot (-1(-a)) \cdot \frac{1}{a}$

$= \frac{1}{-a} \cdot -a \cdot (-\frac{1}{a})$

$= 1 \cdot (-\frac{1}{a})$

$= -1 \left(\frac{1}{a} \right)$

$= -\left(\frac{1}{a} \right)$

Jadi terbukti: $\frac{1}{(-a)} = -\frac{1}{a}$ ter buktikan

Informasi mengenai sifat bilangan real tidak lengkap

Gambar 1. Jawaban tes tertulis tahap 1 MBU

Berdasarkan gambar 1 terlihat bahwa MBU masih mengalami kesulitan dalam menjelaskan informasi mengenai sifat invers bilangan real terhadap penjumlahan. Meskipun MBU menuliskan sifat tersebut, tetapi MBU tidak menuliskan secara lengkap sifat yang dimaksud. Hal ini diperkuat

dengan hasil tes lisan yang dilakukan pada MBU di mana MBU baru bisa menjawab dengan lengkap sifat invers penjumlahan bilangan real ketika diberikan pancingan oleh peneliti. Jadi dapat dikatakan bahwa MBU sebenarnya memahami sifat invers terhadap penjumlahan bilangan real tersebut, tetapi memiliki kesulitan untuk menuliskannya dengan lengkap. Pada gambar 1 juga terlihat bahwa MBU mampu menggunakan dengan tepat informasi dari soal ke dalam proses pembuktian sehingga dapat memaparkan pembuktian dalam bahasa formal yang tepat.

2. $a \cdot a = a \Rightarrow a = 0 \vee a = 1 \in \mathbb{R}$
 misal $a \cdot a = a$
 Asumsikan $a \neq 0$
 Adb $a = 1$
 Bukti: / karena $a \neq 0 \in \mathbb{R}$, maka $\exists \frac{1}{a} \in \mathbb{R} \rightarrow a \cdot \frac{1}{a} = 1 = \frac{1}{a} \cdot a$
 Bukti sehingga
 $a = a \cdot 1$
 $= a \cdot (a \cdot \frac{1}{a})$
 $= (a \cdot a) \cdot \frac{1}{a}$
 $= a \cdot \frac{1}{a}$
 $= 1$
 Jadi terbukti

Gambar 2. Jawaban tes tertulis tahap 2 MBU

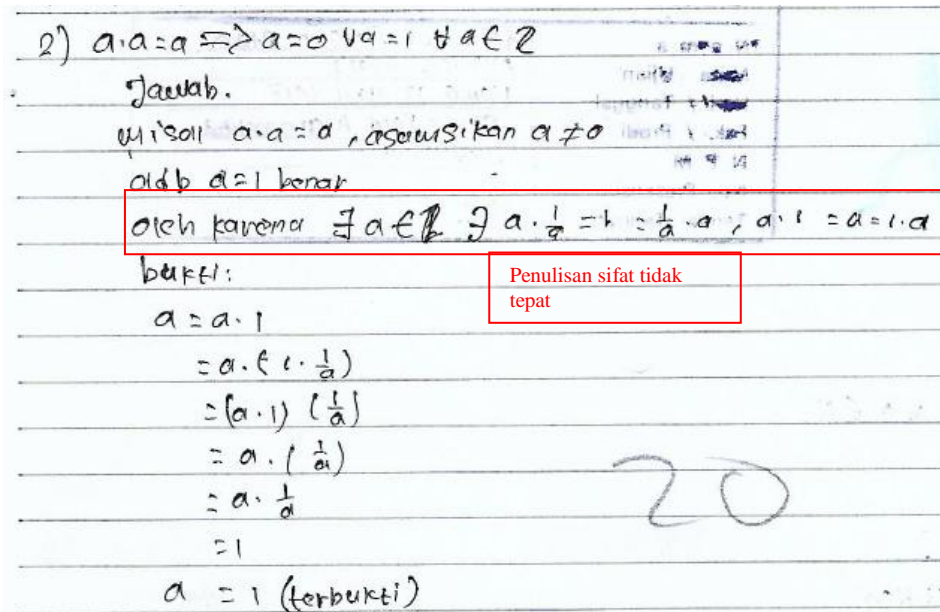
Berdasarkan gambar 2 terlihat bahwa MBU telah memahami maksud soal dan mampu menginterpretasikan langkah-langkah pembuktiannya. Teknik pembuktian yang melibatkan disjungsi pada bagian konklusi pun telah dipahami dengan baik. Hal ini terlihat dari penggunaan asumsi $a \neq 0$ untuk kemudian membuktikan bahwa a haruslah 1. Hal ini diperkuat oleh hasil tes lisan MBU mengenai jawaban soal tes tertulis tahap 2 di mana MBU dapat menjelaskan metode pembuktian serta sifat-sifat yang digunakan dengan tepat.

Subjek Berkemampuan Sedang (RMS)

1) $\frac{1}{a} = -\frac{1}{a}, \forall a \in \mathbb{R}$
 oleh karena $\frac{1}{a} = -\frac{1}{a}, \exists a \in \mathbb{R} \rightarrow -\frac{a}{a} = -1 = a \cdot (-\frac{1}{a}), \frac{1}{a} \cdot a = 1 = a \cdot \frac{1}{a}$
 adbs $\frac{1}{a} = -\frac{1}{a}$
 jawab:
 bukti:
 $\frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot (-1)$
 $= \frac{1}{a} \cdot (a \cdot (-\frac{1}{a}))$
 $= (\frac{1}{a} \cdot a) \cdot (-\frac{1}{a})$
 $= 1 \cdot (-\frac{1}{a})$
 $= -\frac{1}{a}$
 $\frac{1}{a} = -\frac{1}{a} \text{ (terbukti)}$

Gambar 3. Jawaban tes tertulis tahap 1 RMS

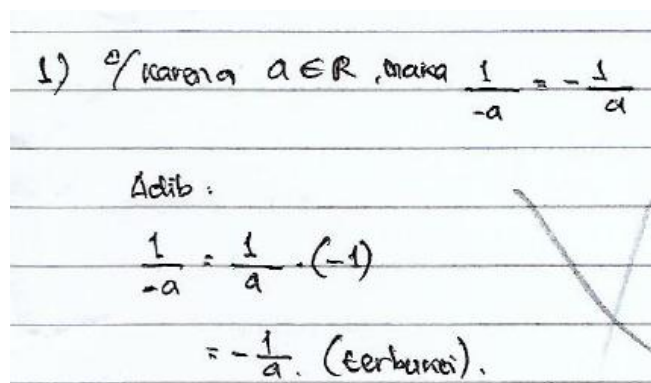
Berdasarkan gambar 3 terlihat bahwa RMS masih mengalami kesulitan dalam menyusun logika-logika pembuktian. Paparan bukti yang dijelaskan oleh RMS masih kurang tepat walaupun saat tes lisan tahap 1 RMS sebenarnya memahami hal yang harus dibuktikan tersebut.



Gambar 4. Jawaban tes tertulis tahap 2 RMS

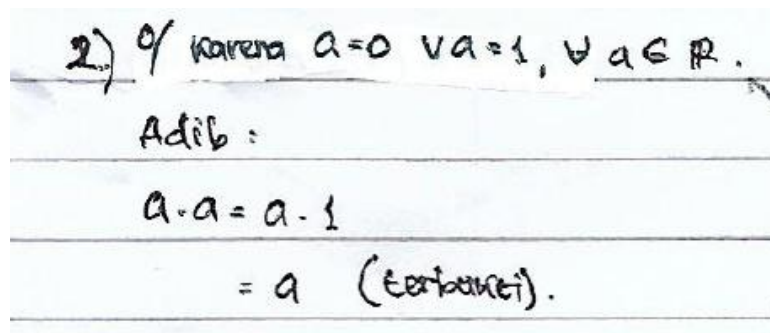
Pada tes tahap 2 RMS mengalami kesulitan dalam menjelaskan maksud soal. Hal ini terlihat dari penulisan sifat yang kurang tepat. Meskipun begitu, RMS mampu menyelesaikan pembuktian ini dengan cukup baik.

Subjek Berkemampuan Rendah (WF)



Gambar 5. Jawaban tes tertulis tahap 1 WF

Berdasarkan gambar 5 terlihat bahwa WF tidak memahami maksud soal beserta logika dan langkah-langkah pembuktiannya. Hal ini terlihat dari jawaban WF pada gambar 5 yang terlihat hanya sekedar mengisi. Dari hasil tes lisan tahap 1, diketahui bahwa WF tidak memahami maksud dari soal yang diberikan dan juga sifat yang diketahui dari soal.



Handwritten mathematical work on lined paper. The first line reads: "2.) 0/ karena a=0 $\forall a=1, \forall a \in \mathbb{R}$." The second line reads: "Adib:". The third line shows the equation $a \cdot a = a - 1$. The fourth line shows the result $= a$ with the word "(terbukti)." written in parentheses.

Gambar 6. Jawaban tes tertulis tahap 2 WF

Sejalan dengan hasil tahap 1, pada tahap 2 WF juga tidak memahami maksud soal beserta logika dan langkah-langkah pembuktiannya. Hal ini terlihat dari gambar 6 yang diperkuat dengan hasil tes lisan tahap 2 di mana WF hanya sekedar mengisi tanpa memahami maksud dari soal.

Berdasarkan hasil penelitian yang telah dipaparkan dapat diketahui bahwa mahasiswa berkemampuan tinggi mampu memahami konsep atau sifat-sifat dari proposisi yang akan dibuktikan. Mereka juga mampu memilih metode pembuktian yang sesuai untuk digunakan dalam pembuktian proposisi matematika. Hanya saja mahasiswa berkemampuan tinggi masih cenderung memiliki kesulitan dalam menuliskan sifat atau konsep yang akan mereka gunakan secara tertulis dalam pembuktian. Saat mengerjakan soal berupa uraian, mahasiswa kesulitan dalam membuat dan menuliskan *reasoning* atau ide-ide prosedur penyelesaian ke dalam bahasa tulisan secara benar dan logis untuk dibaca (Junaedi, 2012). Hal ini seringkali terjadi karena kurangnya pengalaman mahasiswa dalam menyatakan ide penyelesaian masalah matematis ke dalam bentuk tertulis.

Mahasiswa dengan kemampuan sedang cenderung kurang memahami konsep atau sifat matematika yang digunakan dalam membuktikan proposisi. Mereka mampu memahami sifat yang diketahui dari soal. Akan tetapi, mereka kesulitan dalam memilih sifat maupun metode yang tepat digunakan untuk pembuktian. Sedangkan, mahasiswa berkemampuan rendah memiliki kesulitan dalam memahami isi dan maksud dari soal. Mereka bahkan tidak memahami apa yang akan dibuktikan. Salah satu penyebab kesulitan mahasiswa dalam melakukan pembuktian adalah karena konsep-konsep dalam matematika bersifat abstrak dan berjenjang serta menggunakan banyak simbol-simbol sebagai representasi (Güler, 2016).

SIMPULAN

Berdasarkan hasil dan pembahasan yang telah dipaparkan, dapat disimpulkan bahwa mahasiswa berkemampuan tinggi mampu memahami isi dan maksud dari soal, memilih sifat dan metode pembuktian yang tepat, serta menyelesaikan pembuktian dengan benar, tetapi cenderung kesulitan dalam memaparkan sifat atau konsep yang digunakan secara tertulis; mahasiswa berkemampuan sedang mampu memahami isi dan maksud dari soal, tetapi kesulitan dalam memahami dan memilih konsep atau sifat serta metode yang sesuai; dan mahasiswa berkemampuan

rendah cenderung memiliki kesulitan dalam memahami isi dan maksud dari soal serta memilih sifat dan metode pembuktian yang sesuai. Untuk memperdalam hasil penelitian mengenai kesulitan mahasiswa pada pembuktian, maka pada penelitian selanjutnya dapat digunakan metode deteksi kesulitan seperti NEA (*Newman's Error Analysis*) untuk melihat hasil dengan lebih terstruktur.

DAFTAR RUJUKAN

- Awi. (2017). Analisis Kesalahan Mahasiswa dalam Membuktikan Proposisi Struktur Aljabar dengan Pemberian Scaffolding Metakognitif. In *Seminar Nasional Lembaga Penelitian UNM* (Vol. 2, pp. 579–583). Retrieved from <http://ojs.unm.ac.id/semnaslemlit/article/view/4102>
- Güler, G. (2016). The Difficulties Experienced in Teaching Proof to Prospective Mathematics Teachers: Academician Views. *Higher Education Studies*, 6(1), 145–158. <https://doi.org/10.5539/hes.v6n1p145>
- Hodiyanto, & Susiaty, U. D. (2018). Peningkatan Kemampuan Pembuktian Matematis melalui Model Pembelajaran Problem Posing. *MaPan: Jurnal Matematika Dan Pembelajaran*, 6(1), 128–137. <https://doi.org/10.24252/mapan.2018v6n1a12>
- Junaedi, I. (2012). Tipe Kesalahan Mahasiswa dalam Menyelesaikan Soal-Soal Geometri Analitik Berdasar Newmans Error Analysis (NEA). *Kreano, Jurnal Matematika Kreatif-Inovatif*, 3(2), 125–133. <https://doi.org/10.15294/KREANO.V3I2.2872>
- Murtafiah, W., Suprpto, E., & Sanusi. (2017). Pengembangan Bahan Ajar Berorientasi KKNI untuk Penguatan Scientific Approach pada Mata Kuliah Evaluasi dan Proses Pembelajaran Matematika. *Jurnal Penelitian Pendidikan*, 8(1), 1245–1249. Retrieved from <http://ejournal.stkippacitan.ac.id/index.php/jpp/article/view/18>
- Putri, R. A. (2015). Problematika dalam Pembuktian Pernyataan Menggunakan Prinsip Induksi Matematika serta Alternatif Penyelesaiannya. In *Seminar Nasional Matematika Dan Pendidikan Matematika UNY* (pp. 913–920). Yogyakarta: Universitas Negeri Yogyakarta. Retrieved from <http://seminar.uny.ac.id/semnasmatematika/sites/seminar.uny.ac.id/semnasmatematika/files/banner/PM-130.pdf>
- Rosita, C. D. (2014). Kemampuan Penalaran dan Komunikasi Matematis: Apa, Mengapa, dan Bagaimana Ditingkatkan pada Mahasiswa. *Euclid*, 1(1), 33–46. Retrieved from <http://www.fkip-unswagati.ac.id/ejournal/index.php/euclid/article/view/2>
- Sumarno, U. (2010). Berfikir dan Disposisi Matematik: Apa, Mengapa, dan Bagaimana Dikembangkan pada Peserta Didik. Bandung: FPMIPA UPI. Retrieved from https://www.academia.edu/10346582/BERFIKIR_DAN_DISPOSISI_MATEMATIK_APA_MENGAPA_DAN_BAGAIMANA_DIKEMBANGKAN_PADA_PESERTA_DIDIK?auto=download
- Sundstrom, T. (2014). *Mathematical Reasoning: Writing and Proof*. New York: Pearson Education, Inc.
- Suwanti, V. (2016). Penggunaan Peta Konsep untuk Meningkatkan Kemampuan Logika Pembuktian Mahasiswa. *Jurnal Inspirasi Pendidikan*, 6(2), 876–882. <https://doi.org/10.21067/jip.v6i2.1326>
- Utami, N. P., Mukhni, & Jazwinarti. (2014). Kemampuan Penalaran Matematis Siswa Kelas XI IPA SMAN 2 Painan melalui Penerapan Pembelajaran Think Pair Square. *Jurnal Pendidikan Matematika*, 3(1), 7–12. Retrieved from <http://ejournal.unp.ac.id/students/index.php/pmat/article/view/1212>